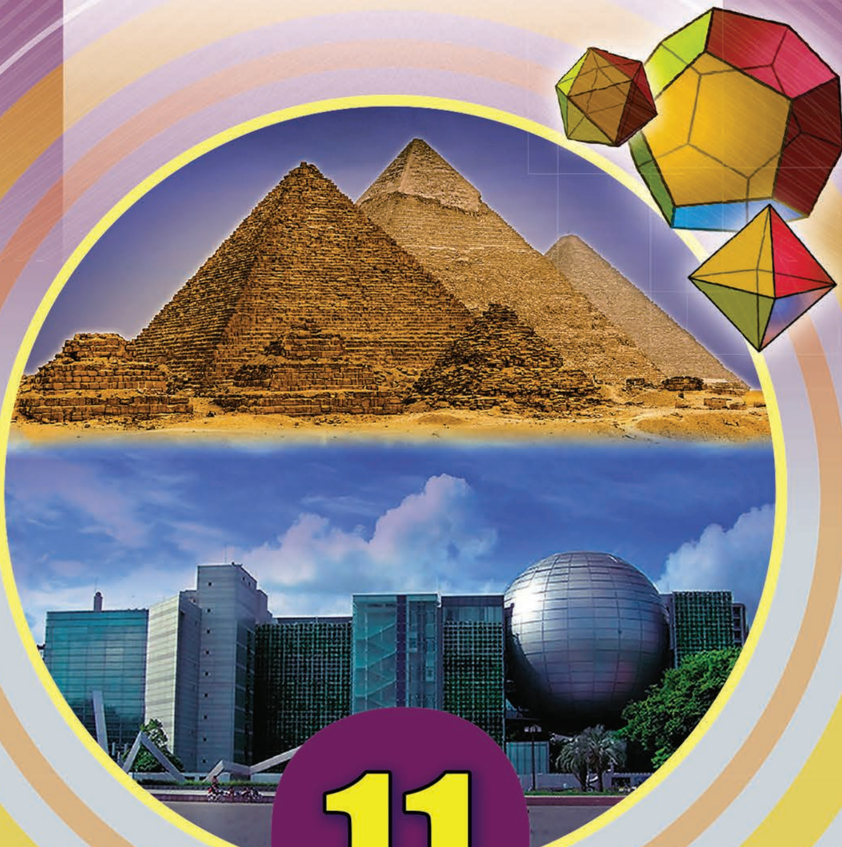
видавництво Генеза

ОЛЕКСАНДР ІСТЕР

МАТЕМАТИКА

АЛГЕБРА І ПОЧАТКИ АНАЛІЗУ ТА ГЕОМЕТРІЯ

РІВЕНЬ СТАНДАРТУ



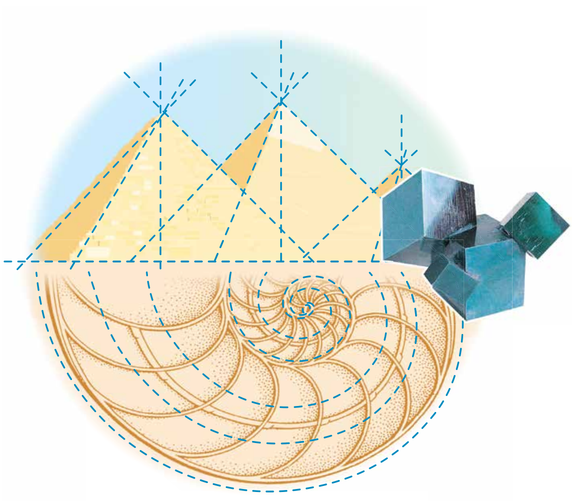
11

Олександр Істер

МАТЕМАТИКА

(АЛГЕБРА І ПОЧАТКИ АНАЛІЗУ ТА ГЕОМЕТРІЯ, РІВЕНЬ СТАНДАРТУ)

Підручник для 11 класу
закладів загальної середньої освіти



Рекомендовано
Міністерством освіти і науки України

КИЇВ
«ГЕНЕЗА»
2019

УДК 51(075.3)
І-89

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України
(наказ Міністерства освіти і науки України
від 12.04.2019 № 472)

Видано за рахунок державних коштів.
Продаж заборонено

Істер О.С.
І-89 Математика : (алгебра і початки аналізу та геометрія, рівень стандарту) : підруч. для 11-го кл. закл. заг. серед. освіти / Олександр Істер. — Київ : Генеза, 2019. — 304 с. : іл.
ISBN 978-966-11-0978-9.

УДК 51(075.3)

ISBN 978-966-11-0978-9

Шановні одинадцятикласниці та одинадцятикласники!

Протягом навчання в 11 класі ви продовжите опановувати шкільний курс «Математика», у якому об’єднано матеріал кількох галузей математичної науки.

Нагадаємо, що математика є основним засобом у багатьох галузях науки і техніки. Без математики не можуть існувати медицина, економіка, машинобудування. Певних знань з математики та вміння їх застосовувати вимагає й вивчення інших шкільних навчальних предметів. Наприклад, без математики неможливо уявити фізику, хімію, інформатику тощо. Сучасний ринок праці, отримання якісної професійної освіти, продовження освіти на наступних етапах також потребують володіння певними прийомами математичної діяльності та навичками їх застосування до розв’язування практичних задач. Тому одне з головних завдань курсу математики старшої школи – допомогти кожному з вас досягти такої практичної компетентності, яка б забезпечила готовність до повсякденного життя, до найважливіших видів суспільної діяльності, до оволодіння обраною професією. Підручник, який ви тримаєте в руках, допоможе вам у цьому.

Вивчення математики потребуватиме від вас наполегливості, логіки мислення, просторової уяви.

Для зручності матеріал підручника структуровано за допомогою розділів, параграфів, рубрик. Кожен параграф містить теоретичний матеріал, зразки розв’язування задач і виконання вправ, запитання до теоретичного матеріалу, завдання для класної та домашньої робіт тощо. Теоретичний матеріал підручника автор намагався викласти простою, доступною мовою, проілюструвати малюнками та прикладами застосування математики в повсякденному житті.

У підручнику ви побачите такі умовні позначення:

! – означення та математичні твердження, які треба запам’ятати;

T – теорема; H – наслідок; ■ – доведення завершено;

– «ключова» задача (задача, висновки якої використовуються для розв’язування інших задач);

? – запитання до теоретичного матеріалу;

1.23 – вправа для виконання у класі;

1.24 – вправа для виконання вдома.

Усі задачі та вправи розподілено відповідно до чотирьох рівнів навчальних досягнень і виокремлено так:

- з позначки 1 починаються вправи початкового рівня;
- з позначки 2 починаються вправи середнього рівня;
- з позначки 3 починаються вправи достатнього рівня;
- з позначки 4 починаються вправи високого рівня.

Рубрика **«Розв’яжіть задачі та виконайте вправи»** містить значну кількість завдань для класної та домашньої робіт, усних вправ, практичних завдань, які відповідають темі параграфа та допоможуть добре її опрацювати. У рубриці **«Підготуйтеся до вивчення нового матеріалу»** пропонується виконати вправи, необхідні для вивчення наступної теми. У рубриці **«Життєва математика»** зібрано задачі, які відображають реальні життєві ситуації, пов’язані з економічною грамотністю і підприємливістю, екологічною безпекою, здоровим способом життя, громадянською відповідальністю, тобто всім тим, без чого неможливо уявити людину в сучасному світі. Наприкінці кожного параграфа, у рубриці **«Перевірте свою компетентність»**, ви знайдете тестові завдання, завдяки яким зможете повторити курс математики, перевірити свою предметну компетентність, рівень своєї готовності до складання зовнішнього незалежного оцінювання.

Перевірити свої знання та підготуватися до тематичного оцінювання ви зможете, якщо виконаєте завдання **«Домашньої самостійної роботи»** та **«Завдання для перевірки знань»**.

Також підручник містить рубрику **«А ще раніше...»**, у якій багато цікавих фактів з історії становлення та розвитку математичної науки, виникнення основних її понять, життєвого шляху українських учених, які долучилися до творення шкільного курсу математики.

Бажаємо вам успіхів у навчанні!

Шановні вчительки та вчителі!

Програма з математики рівня стандарту складається з двох навчальних курсів: алгебра і початки аналізу та геометрія. Тому пропонований підручник, відповідно до програми, також містить дві частини.

Сподіваємося, що підручник суттєво допоможе вам в організації процесу навчання математики. Автор намагався створити його таким, щоб він у повній мірі реалізував мету державної програми з математики, формував в учнів науковий світогляд, усвідомлення, що математичні знання є невід’ємною складовою загальної культури людини і необхідною умовою повноцінного життя в сучасному суспільстві, допоміг оволодіти системою математичних знань, навичками та вміннями, потрібними в повсякденному житті та в майбутній професійній діяльності, забезпечив розвиток логічного мислення, інтуїції, просторової уяви, алгоритмічної, інформаційної та графічної культури, формував життєві й предметні компетентності, загальнолюдські цінності особистості, виховував національну самосвідомість.

Окрім традиційної структури (розділи, параграфи, рубрики), поділу навчального матеріалу на теоретичну та практичну складові, підручник містить рубрику **«Життєва математика»**, що сприятиме реалізації наскрізних ліній програми з математики та допоможе формувати в учнів практичну компетентність. У підручник включено велику кількість задач і вправ, завдань практичного змісту. Диференційованість задач і вправ за чотирма рівнями складності забезпечить особистісно орієнтований підхід до організації процесу навчання та сприятиме формуванню позитивної мотивації учнів до навчання.

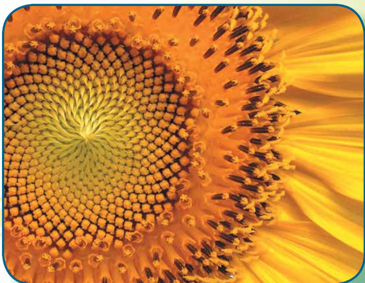
Щасти вам у вашій нелегкій праці!

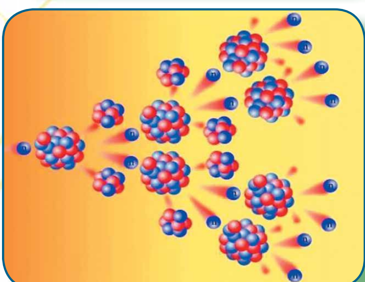
ЧАСТИНА I

АЛГЕБРА І ПОЧАТКИ АНАЛІЗУ

РОЗДІЛ 1

ПОКАЗНИКОВА ТА ЛОГАРИФМІЧНА ФУНКЦІЇ





У ЦЬОМУ РОЗДІЛІ ВИ:

- ***дізнаєтеся*** про степінь з довільним показником; поняття логарифма числа;
- ***ознайомитеся*** з показниковою та логарифмічною функціями;
- ***навчитеся*** будувати графіки показникових і логарифмічних функцій; застосовувати їх властивості; розв’язувати показникові та логарифмічні рівняння й нерівності.

§ 1. СТЕПІНЬ З ДОВІЛЬНИМ ДІЙСНИМ ПОКАЗНИКОМ. ПОКАЗНИКОВА ФУНКЦІЯ, ЇЇ ВЛАСТИВОСТІ ТА ГРАФІКИ

Раніше ви розглядали різні класи степеневих функцій і степені: з натуральним показником, цілим показником, раціональним показником. Нагадаємо, що

$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ множників}}$, якщо $n \geqslant 2$ – натуральне число;

$a^1 = a$; $a^0 = 1$ $(a \neq 0)$; $a^{-p} = \dfrac{1}{a^p}$, де p – ціле число, $a \neq 0$;

$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$, де $a > 0$, n – натуральне число, m – ціле число.

А чи можна розглядати вираз a^l, де l – ірраціональне число?

1. Степінь з довільним дійсним показником

Розглянемо вираз a^l, де $a > 0$, l – ірраціональне число. Для цього числа l вибираємо послідовність раціональних чисел $l_1, l_2, \ldots, l_n, \ldots$, що задає наближення числа l з будь-якою точністю. Будуємо послідовність степенів з раціональним показником $a^{l_1}, a^{l_2}, \ldots, a^{l_n}, \ldots$. Ця послідовність і задає наближення числа a^l з будь-якою точністю.

Приклад 1. Розглянемо степінь $3^{\sqrt{2}}$. Ірраціональне число $\sqrt{2}$ можна подати у вигляді нескінченного неперіодичного дробу: $\sqrt{2} = 1{,}41421356\ldots$.

Оскільки $1 < \sqrt{2} < 2$, то $3^1 < 3^{\sqrt{2}} < 3^2$, тобто $3 < 3^{\sqrt{2}} < 9$.

Звичайно, така оцінка для числа $3^{\sqrt{2}}$ є неточною, тому розглянемо наступні десяткові наближення числа $\sqrt{2}$ та використаємо калькулятор для обчислення виразів вигляду 3^{α}, де α – раціональне число:

$1{,}4 < \sqrt{2} < 1{,}5;$ $\quad 3^{1,4} < 3^{\sqrt{2}} < 3^{1,5};$

$$4{,}6555367 < 3^{\sqrt{2}} < 5{,}1961524;$$

$1{,}41 < \sqrt{2} < 1{,}42;$ $\quad 3^{1,41} < 3^{\sqrt{2}} < 3^{1,42};$

$$4{,}7069650 < 3^{\sqrt{2}} < 4{,}7589613;$$

$1{,}414 < \sqrt{2} < 1{,}415;$ $\quad 3^{1,414} < 3^{\sqrt{2}} < 3^{1,415};$

$$4{,}7276950 < 3^{\sqrt{2}} < 4{,}7328918;$$

$1{,}4142 < \sqrt{2} < 1{,}4143;$ $\quad 3^{1,4142} < 3^{\sqrt{2}} < 3^{1,4143};$

$$4{,}7287339 < 3^{\sqrt{2}} < 4{,}7292534.$$

Бачимо, що поступові значення з недостачею і надлишком наближаються до одного і того самого числа. Значення $3^{\sqrt{2}}$ обчислено на калькуляторі: $3^{\sqrt{2}} \approx 4{,}7288043$.

Як і для раціональних показників, вважають, що: $1^l = 1$ для будь-якого l; $0^l = 0$ для будь-якого $l > 0$.

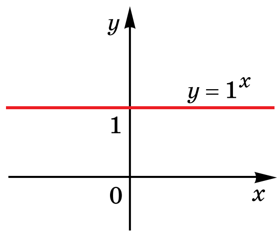
Перед вивченням наступних пунктів цього параграфа радимо повторити основні відомості про функцію, з якими ви ознайомилися в попередніх класах: парність і непарність функції, нулі функції, точки перетину з осями координат, проміжки зростання та проміжки спадання функції, точки екстремумів та екстремуми функції.

2. Показникова функція та її графік

Функцію, яку задано формулою $y = a^x$ (де $a > 0$, $a \neq 1$), називають *показниковою функцією*.

Приклади показникових функцій: $y = 7^x$, $y = \left(\frac{1}{8}\right)^x$, $y = \pi^x$, $y = (\sqrt{3})^x$ тощо. Зауважимо, що показникові функції відіграють значну роль у житті людини. Наприклад, вони є математичними моделями таких процесів: зміна популяції протягом тривалого часу, зміна радіоактивної речовини з плином часу тощо.

Функція виду $y = a^x$ існує і при $a = 1$. Тоді $y = 1^x$, тобто $y = 1$ при всіх дійсних значеннях x. Графіком функції $y = 1^x$ є пряма (мал. 1.1). Зауважимо, що у випадку $a = 1$ функція $y = a^x$ не називається показниковою.



Мал. 1.1

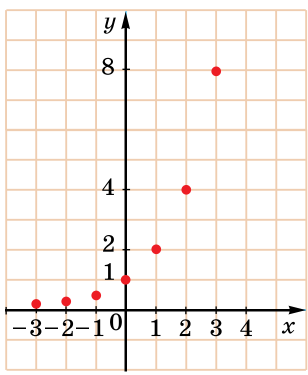
Перейдемо до розгляду показникової функції $y = a^x$. Оскільки при $a > 0$ вираз a^x має зміст при будь-якому x, то

***областю визначення* функції $y = a^x$ є множина всіх дійсних чисел.**

Розглянемо показникові функції та побудуємо їх графіки за точками.

Приклад 2. Розглянемо функцію $y = 2^x$. Складемо таблицю значень функції для кількох цілих значень аргументу.

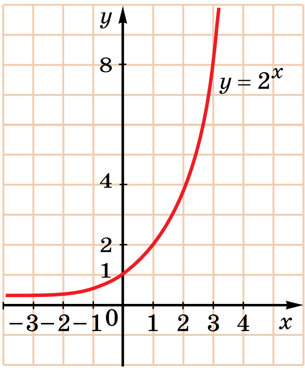
x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8



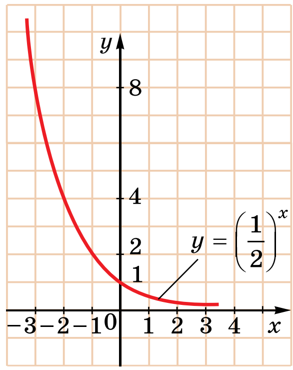
Мал. 1.2

Позначимо на координатній площині точки, координати яких подано в таблиці (мал. 1.2). Якби на цій площині позначили більшу кількість точок, координати яких задовольняють формулу $y = 2^x$, а потім сполучили їх плавною лінією, то отримали б графік функції $y = 2^x$ (мал. 1.3).

Зауважимо, що вираз a^x, де $a > 0$, є додатним для будь-якого значення x, тому графік функції $y = a^x$ (і зокрема $y = 2^x$) не перетинає вісь абсцис. Але, якщо $x \to -\infty$, то значення виразу $2^x \to 0$. Тому графік функції $y = 2^x$ при $x \to -\infty$ наближається до осі абсцис, тобто вісь x є асимптотою цього графіка.



Мал. 1.3



Мал. 1.4

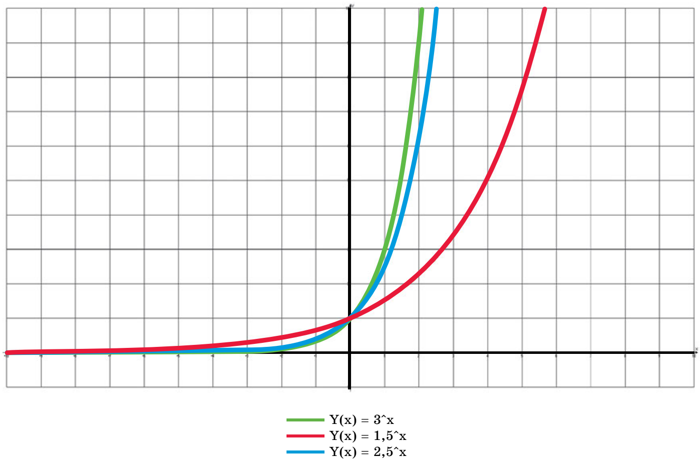
Приклад 3. Розглянемо функцію $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$. Складемо таблицю значень.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$

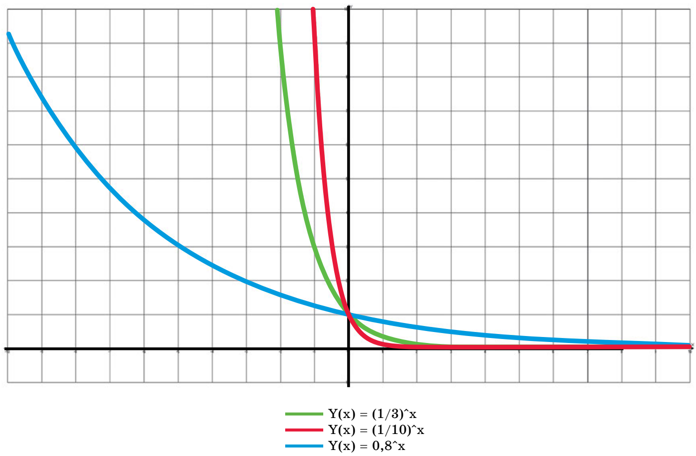
Міркуючи аналогічно до прикладу 2, матимемо графік функції $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ (мал. 1.4).

3. Властивості показникової функції

На малюнку 1.5 зображено графіки функцій $y = 3^x$, $y = 2{,}5^x$, $y = 1{,}5^x$, які побудовано за допомогою комп'ютерної програми. Можна зробити висновок, що при $a > 1$ графік функції $y = a^x$ схематично виглядає так само, як графік функції $y = 2^x$. На малюнку 1.6 подано графіки функцій $y = 0{,}8^x$, $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$, $y = \left(\frac{1}{10}\right)^x$, де $0 < a < 1$, і вони виглядають так само, як графік функції $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$.



Мал. 1.5



Мал. 1.6

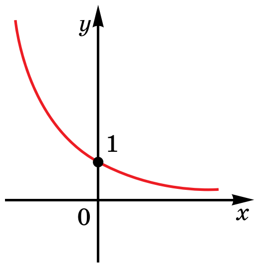
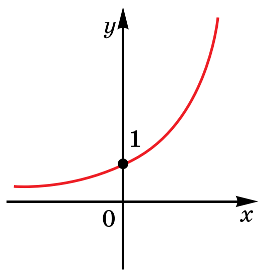
Систематизуємо властивості функції $y = a^x$ при $0 < a < 1$ та при $a > 1$ у вигляді таблиці (див. с. 10).

Властивості степенів з раціональними показниками, з якими ви ознайомилися в попередніх класах, тепер можна поширити на дійсні показники.

Якщо $a > 0$, $b > 0$, x і y – дійсні числа, то:

$$a^x \cdot a^y = a^{x+y}; \quad \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}; \quad (a^x)^y = a^{xy};$$

$$(ab)^x = a^x b^x; \quad \left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}.$$

№	Властивість	$0 < a < 1$	$a > 1$
1	Область визначення	$x \in R$	$x \in R$
2	Множина значень	$(0;\ +\infty)$	$(0;\ +\infty)$
3	Парність, непарність	Ні парна, ні непарна	Ні парна, ні непарна
4	Періодичність	Неперіодична	Неперіодична
5	Нулі функції	Немає	Немає
6	Проміжки знакосталості	$y > 0$ при $x \in R$	$y > 0$ при $x \in R$
7	Проміжки монотонності	Спадає при $x \in R$	Зростає при $x \in R$
8	Екстремуми	Немає	Немає
9	Асимптота	$y = 0$	$y = 0$
10	Графік функції проходить через точку (0; 1)		

Розглянемо приклади використання властивостей показникової функції.

Задача 1. Порівняти значення виразів:

1) $\pi^{2,7}$ і $\pi^{2,8}$; 2) $(\sqrt{2}-1)^{-5}$ і $(\sqrt{2}-1)^{-4}$.

Розв'язання. 1) Функція $y = \pi^x$ зростає на R ($\pi \approx 3,14 > 1$), тому більшому значенню аргументу відповідає більше значення функції. Оскільки $2,7 < 2,8$, то $\pi^{2,7} < \pi^{2,8}$.

2) Функція $y = (\sqrt{2}-1)^x$ спадає на R ($\sqrt{2}-1 \approx 0,4 < 1$), тому більшому значенню аргументу відповідає менше значення функції. Оскільки $-5 < -4$, то $(\sqrt{2}-1)^{-5} > (\sqrt{2}-1)^{-4}$.

Відповідь. 1) $\pi^{2,7} < \pi^{2,8}$; 2) $(\sqrt{2}-1)^{-5} > (\sqrt{2}-1)^{-4}$.

Задача 2. Порівняти з одиницею основу степеня a ($a > 0$), якщо: 1) $a^{\sqrt{3}} < a^{1,8}$; 2) $a^{-2} > a$.

Розв'язання. 1) Оскільки $\sqrt{3} \approx 1,73$, то $\sqrt{3} < 1,8$. За умовою $a^{\sqrt{3}} < a^{1,8}$, більшому значенню аргументу відповідає більше значення функції, тому функція $y = a^x$ зростає, а отже, $a > 1$.
2) $-2 < 1$, а за умовою $a^{-2} > a$. Тому більшому значенню аргументу відповідає менше значення функції, отже, функція $y = a^x$ спадає, звідки $0 < a < 1$.

Відповідь. 1) $a > 1$; 2) $0 < a < 1$.

Вирази, що містять степені з дійсними показниками, можна спрощувати, використовуючи формули аналогічно спрощенню виразів з раціональними показниками.

Задача 3. Спростити вираз:

1) $a^{1+\sqrt{2}} \cdot a^{1-\sqrt{2}}$; 2) $b^{3-\sqrt{7}} : b^{1+\sqrt{7}}$; 3) $\left(c^{\sqrt{5}}\right)^{\sqrt{20}}$.

Розв'язання. 1) $a^{1+\sqrt{2}} \cdot a^{1-\sqrt{2}} = a^{1+\sqrt{2}+1-\sqrt{2}} = a^2$;
2) $b^{3-\sqrt{7}} : b^{1+\sqrt{7}} = b^{3-\sqrt{7}-(1+\sqrt{7})} = b^{3-\sqrt{7}-1-\sqrt{7}} = b^{2-2\sqrt{7}}$;
3) $\left(c^{\sqrt{5}}\right)^{\sqrt{20}} = c^{\sqrt{5}\cdot\sqrt{20}} = c^{\sqrt{100}} = c^{10}$.

Відповідь. 1) a^2; 2) $b^{2-2\sqrt{7}}$; 3) c^{10}.

4. Застосування показникової функції до розв'язування прикладних задач

Розглянемо приклади застосування показникової функції до розв'язування прикладних задач.

Показникова функція часто використовується для описання різних фізичних процесів, наприклад, радіоактивний розпад описується формулою:

$$m(t) = m_0\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T_0}},$$

де m_0 – маса радіоактивної речовини в початковий момент часу $t = 0$, $m(t)$ – її маса в момент часу t, T_0 – період напіврозпаду (інтервал часу, за який початкова кількість речовини зменшиться вдвічі).

Задача 4. Період напіврозпаду деякого ізотопу плутонія дорівнює 140 діб. Скільки плутонія залишиться через 4 роки, якщо його початкова маса дорівнює 10 г?

Розв'язання. Маємо $m_0 = 10$ г, $t = 3 \cdot 365 + 366 = 1461$ (діб).

Тоді $m(1461) = 10 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1461}{140}} \approx 0,0072$ г.

Відповідь. 0,0072 г.

За допомогою показникової функції також, наприклад, виражається тиск повітря залежно від підйому.

Задача 8. Альпініст, який піднявся на висоту $h_1 = 1000$ м, визначив, що тиск повітря $p_1 = 680$ мм рт. ст. Яким буде тиск повітря на висоті $h_2 = 2100$ м за тієї самої температури?

Розв'язання. Відомо, що тиск p_2 (при незмінній температурі) обчислюють за барометричною формулою:

$$p_2 \approx p_1 \cdot (0{,}8886)^{h_2 - h_1},$$

де h_1 і h_2 – висоти в кілометрах.

Отже, $p_2 \approx 680 \cdot (0{,}8886)^{2{,}1-1} \approx 597{,}2$ мм рт. ст.

Відповідь. 597,2 мм рт. ст.

А ще раніше...

До початку XVII ст. в математиці уникали застосовувати дробові та від'ємні показники степеня. Тільки в кінці XVII ст. у зв'язку з ускладненням математичних завдань з'явилася нагальна потреба розширити область визначення показника степеня на всі дійсні числа. Узагальнення поняття степеня a^n, де n – будь-яке дійсне число, дало змогу розглядати показникову функцію $y = a^x$ на множині дійсних чисел і степеневу функцію $y = x^n$ на множині додатних чисел, а при цілих n степенева функція визначена і для $x < 0$.

Першим питання узагальнення поняття степеня розглянув Л. Ейлер у своїй праці «Введення в аналіз», де у двох розділах описав «показові та логарифмічні кількості». Під «показовою кількістю» Ейлер розумів вирази вигляду a^z і y^z, де a – число, y та z – змінні.

• Поясніть, як задається степінь a^l, де $a > 0$, l – ірраціональне число. • Яку функцію називають показниковою? • Укажіть властивості показникової функції $y = a^x$ при $0 < a < 1$ і при $a > 1$. • Запишіть властивості степеня з дійсним показником.

Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

1

1.1. (*Усно.*) Які з наведених функцій є показниковими:

1) $y = 3^x$; 2) $y = x^3$; 3) $y = 1^x$;
4) $y = (-2)^x$; 5) $y = (\sqrt{2020})^x$; 6) $y = x$;
7) $y = (x-2)^3$; 8) $y = (\pi - 1)^x$?

Які з наведених функцій є зростаючими, а які – спадними **(1.2–1.3)**:

1.2. 1) $y = 8^x$; 2) $y = 0{,}4^x$; 3) $y = 0{,}01^x$; 4) $y = (2\pi)^x$?

1.3. 1) $y = 0{,}15^x$; 2) $y = 7^x$; 3) $y = \left(1\frac{8}{9}\right)^x$; 4) $y = \left(\frac{1}{100}\right)^x$?

1.4. Порівняйте x і y, якщо: 1) $0{,}2^x > 0{,}2^y$; 2) $1{,}3^x > 1{,}3^y$.

1.5. Порівняйте m і n, якщо: 1) $5^m < 5^n$; 2) $0{,}7^m < 0{,}7^n$.

2 Порівняйте числа **(1.6–1.7)**:

1.6. 1) $4^{0,2}$ і $4^{0,5}$; 2) $\left(\frac{3}{7}\right)^{-2}$ і $\left(\frac{3}{7}\right)^{-3}$.

1.7. 1) $\left(\frac{4}{9}\right)^{0,8}$ і $\left(\frac{4}{9}\right)^{0,9}$; 2) 8^{-2} і $8^{-1,9}$.

Побудуйте схематично графік функції та запишіть її властивості **(1.8–1.9)**:

1.8. 1) $y = 1{,}4^x$; 2) $y = 0{,}7^x$.

1.9. 1) $y = 0{,}6^x$; 2) $y = 2{,}3^x$.

1.10. Порівняйте числа a і b, якщо:

1) $\left(\sin\frac{\pi}{9}\right)^a > \left(\sin\frac{\pi}{9}\right)^b$; 2) $\left(\frac{1}{\cos 12°}\right)^a > \left(\frac{1}{\cos 12°}\right)^b$.

1.11. Порівняйте числа p і q, якщо:

1) $\left(\cos\frac{\pi}{8}\right)^p < \left(\cos\frac{\pi}{8}\right)^q$; 2) $\left(\frac{1}{\sin 15°}\right)^p < \left(\frac{1}{\sin 15°}\right)^q$.

Порівняйте a з одиницею $(a > 0)$ **(1.12–1.13)**:

1.12. 1) $a^{12} > a^{10}$; 2) $a^{-7} < a^{-8}$.

1.13. 1) $a^{-8} < a^{-3}$; 2) $a^{15} > a^{16}$.

Знайдіть множину значень функції **(1.14–1.15)**:

1.14. 1) $y = -5^x$; 2) $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x + 1$; 3) $y = 7^x - 3$; 4) $y = 1 - \left(\frac{2}{7}\right)^x$.

1.15. 1) $y = -\left(\frac{1}{7}\right)^x$; 2) $y = 2^x - 5$; 3) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x + 5$; 4) $y = 2 - 4^x$.

1.16. Період напіврозпаду деякого ізотопу плутонія дорівнює 140 діб. Визначте масу плутонія, який залишиться через 8 років, якщо його початкова маса дорівнює 6 г.

1.17. Період напіврозпаду деякого ізотопу торія дорівнює 24 доби. Визначте масу торія, який залишиться через 4 роки, якщо його початкова маса дорівнює 20 г.

1.18. Альпіністка, яка піднялася на висоту $h_1 = 800$ м, визначила, що тиск повітря $p_1 = 700$ мм рт. ст. Яким буде тиск повітря на висоті $h_2 = 1200$ м за тієї самої температури?

1.19. Група альпіністів та альпіністок розбили базовий табір на висоті $h_1 = 700$ м і визначили, що тиск повітря на цій висоті становить $p_1 = 703$ мм рт. ст. Яким буде тиск повітря на висоті $h_2 = 1600$ м, на яку піднялася група для встановлення прапора України, якщо температура за час підйому не змінилася?

Обчисліть **(1.20–1.21)**:

1.20. 1) $\left(\left(\sqrt{7}\right)^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}}$; 2) $\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{3}}\right)^{\sqrt{3}}$;

3) $5^{1-2\sqrt{3}} \cdot 5^{-2\sqrt{3}+2}$; 4) $7^{2-\sqrt{3}} : 7^{3-\sqrt{3}}$.

1.21. 1) $\left(2^{\sqrt{5}}\right)^{\sqrt{5}}$; 2) $\left(\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}}$;

3) $9^{1+7\sqrt{2}} \cdot 9^{-2-7\sqrt{2}}$; 4) $4^{2+\sqrt{5}} : 4^{\sqrt{5}}$.

При якому значенні a ($a > 0$, $a \neq 1$) графік функції $y = a^x$ проходить через задану точку **(1.22–1.23)**:

1.22. 1) $A(1;\ 7)$; 2) $B\left(1;\ \frac{1}{3}\right)$; 3) $C(2;\ 9)$; 4) $D\left(2;\ \frac{4}{25}\right)$?

1.23. 1) $M(1;\ 5)$; 2) $N\left(-1;\ \frac{1}{7}\right)$; 3) $P(2;\ 16)$; 4) $Q\left(2;\ \frac{9}{100}\right)$?

1.24. Точка $M(\sin 30°;\ y)$ належить графіку функції $y = 4^x$. Знайдіть y.

1.25. Точка $N(\text{tg}\,45°;\ y)$ належить графіку функції $y = 1{,}7^x$. Знайдіть y.

3 Зростаючою чи спадною є функція **(1.26–1.27)**:

1.26. 1) $y = 16^{-\frac{x}{2}}$; 2) $y = \left(\cos\frac{\pi}{6}\right)^{-x}$?

1.27. 1) $y = \left(\frac{1}{7}\right)^{-2x}$; 2) $y = \left(2\sin\frac{\pi}{3}\right)^{-x}$?

Обчисліть **(1.28–1.29)**:

1.28. 1) $2^{1-2\sqrt{7}} \cdot 4^{\sqrt{7}+1}$; 2) $3^{(\sqrt{5}+1)^2} : 3^{2\sqrt{5}+4}$.

1.29. 1) $9^{\sqrt{5}-1} \cdot 3^{3-2\sqrt{5}}$; 2) $4^{(1-\sqrt{7})^2} : 4^{6-2\sqrt{7}}$.

Порівняйте числа **(1.30–1.31)**:

1.30. 1) $\pi^{\frac{1}{9}}$ і 1; 2) 1 і $0{,}3^{-2}$; 3) 1 і $2{,}4^{-5}$; 4) $0{,}7^{0,5}$ і 1.

1.31. 1) 1 і $4^{\frac{1}{8}}$; 2) $0{,}2^{1,7}$ і 1; 3) $2{,}5^{-2}$ і 1; 4) 1 і $0{,}3^{-1,8}$.

Побудуйте графік функції **(1.32–1.33)**:

1.32. 1) $y = 2^x + 1$; 2) $y = 2^{x+1}$; 3) $y = -2^x$; 4) $y = 3 - 2^x$.

1.33. 1) $y = 3^x - 2$; 2) $y = 3^{x-2}$; 3) $y = -3^x$; 4) $y = 5 - 3^x$.

1.34. Знайдіть множину значень функції:

1) $y = 3^{|x|}$; 2) $y = 4^{-|x|}$; 3) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{|x|}$; 4) $y = \left(\frac{7}{8}\right)^{-|x|}$.

1.35. Знайдіть найменше і найбільше значення функції $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$, якщо $x \in [-2; 3]$.

1.36. Знайдіть найменше і найбільше значення функції $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$, якщо $x \in [-1; 4]$.

Знайдіть найменше і найбільше значення функції на R **(1.37–1.38)**:

1.37. 1) $y = 5^{\sin x}$; 2) $y = \left(\frac{1}{4}\right)^{\cos x}$;

3) $y = 1 + 2^{|\sin x|}$; 4) $y = \left(\frac{1}{7}\right)^{-|\cos x|} - 1$.

1.38. 1) $y = \left(\frac{1}{3}\right)^{\sin x}$; 2) $y = 5^{|\cos x|}$.

Порівняйте числа **(1.39–1.40)**:

1.39. 1) $\left(\left(\sqrt{5}\right)^{\sqrt{5}}\right)^{\sqrt{5}}$ і $5^{2,5}$; 2) $(2-\sqrt{3})^{-3}$ і $(2+\sqrt{3})^{3,2}$.

1.40. 1) $\left(\left(\sqrt{2}\right)^{\sqrt{3}}\right)^{\sqrt{3}}$ і $2^{1,48}$; 2) $(\sqrt{2}-1)^{4,2}$ і $(\sqrt{2}+1)^{-4,2}$.

1.41. Побудуйте схематично графік функції $y = \left(\frac{1}{3}\right)^{1-x}$.

1.42. Побудуйте схематично графік функції $y = 2^{2-x}$.

Розв'яжіть рівняння графічно **(1.43–1.44)**:

1.43. 1) $\left(\frac{1}{2}\right)^x = -\frac{2}{x}$; 2) $2^{-x} = x + 6$.

1.44. 1) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-x} = 4 - x$; 2) $2^x = \frac{8}{x}$.

Життєва математика

1.45. Студент Олексій отримав за виконаний переклад свій перший гонорар у розмірі 500 грн. Він вирішив на всі отримані гроші купити букет троянд для своєї вчительки з англійської мови Марини Петрівни. Яку найбільшу кількість троянд зможе купити студент, якщо утриманий з нього податок на доходи становить 18 % гонорару, військовий збір – 1,5 %, троянди коштують 25 грн за штуку і букет повинен складатися з непарного числа квітів?

1.46. За одну годину роботи автомобільний двигун спалює 200 л кисню. Добова норма, необхідна для дихання однієї людини, становить 80 л кисню. Скільки добових норм кисню спалюють щоденно 400 автомобілів жителів деякого населеного пункту під час поїздки на роботу, якщо шлях займає 30 хв?

Підготуйтеся до вивчення нового матеріалу

Розв'яжіть рівняння (**1.47–1.48**):

1.47. 1) $-2x = 6$; 2) $4x = -3$; 3) $(x-2)(x+3) = 0$; 4) $x^2 - 3x - 4 = 0$; 5) $x^2 + x + 7 = 0$; 6) $9x^2 - 6x + 1 = 0$.

1.48. 1) $(x+2)^2 = 2x + 3$; 2) $3(x+1)^2 = 2x + 2$; 3) $\dfrac{x-2}{x} = \dfrac{3}{x+2}$; 4) $\dfrac{20}{x} - \dfrac{20}{x+1} = 1$.

1.49. Подайте числа 8, $\dfrac{1}{16}$, 64, $\dfrac{1}{128}$, 2, 128, 1 у вигляді степеня з основою 2.

Перевірте свою компетентність!

Завдання № 1

1. Скільки чотирицифрових чисел, що діляться на 5, можна утворити із цифр 1, 3, 5, 7 (цифри в кожному числі не повинні повторюватися)?

А	Б	В	Г	Д
6	12	18	20	24

2. У зв'язку з тим, що родина більшу частину липня провела у відпустці, за цей місяць холодної води було спожито на 80 % менше, ніж у червні. У скільки разів менше спожила родина холодної води в липні, ніж у червні?

А	Б	В	Г	Д
у 2 рази	в 4 рази	в 5 разів	у 8 разів	неможливо визначити

3. Дано 10 чисел. Серед них числа 5 і 6 трапляються по 3 рази, а число 7 – 4 рази. Знайдіть середнє арифметичне цих 10 чисел.

А	Б	В	Г	Д
5,9	6	6,1	6,2	6,3

4. Скільки цілих розв'язків має нерівність $\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x - 3 < 0$?

А	Б	В	Г	Д
безліч	6	5	4	3

5. Знайдіть похідну функції $y = x^5 - 2\cos x$.

А	$y' = 5x^4 - 2\sin x$	**Г**	$y' = 5x^4 - 2\cos x$
Б	$y' = 5x^4 + \sin x$	**Д**	$y' = 5x^4 + 2\sin x$
В	$y' = x^4 + 2\sin x$		

6. Скоротіть дріб $\frac{\cos 4\alpha}{\cos 2\alpha - \sin 2\alpha}$.

А	$\frac{1}{\cos 2\alpha + \sin 2\alpha}$	**Г**	$\cos 2\alpha + \sin 2\alpha$
Б	$-\frac{2}{\sin 2\alpha}$	**Д**	$\cos 2\alpha - \sin 2\alpha$
В	$\frac{1}{\cos 2\alpha - \sin 2\alpha}$		

7. Установіть відповідність між властивістю чисел (1–4) і парою чисел (А–Д), що має цю властивість.

Властивість чисел

1 Менше число є дільником більшого

2 Найбільший спільний дільник чисел дорівнює 5

3 Найменше спільне кратне чисел дорівнює 40

4 Числа взаємно прості

Пара чисел

А 12 і 25

Б 14 і 21

В 7 і 21

Г 10 і 15

Д 20 і 8

	А	Б	В	Г	Д
1					
2					
3					
4					

8. Відомо, що $\sin\alpha + \cos\alpha = 0{,}2$. Чому дорівнює $\sin 2\alpha$?

9. При якому значенні параметра a система $\begin{cases} x + ay = 1 - a, \\ ax + 4y = -6 \end{cases}$ має безліч розв'язків?

§ 2. ПОКАЗНИКОВІ РІВНЯННЯ

Рівняння називають *показниковим*, якщо воно містить змінну лише в показниках степенів.

Приклади показникових рівнянь:

$$2^x = 8,\ 3^x + 9^x = 2,\ \frac{1}{2^x + 1} + \frac{1}{2^x - 2} = 3 \text{ тощо.}$$

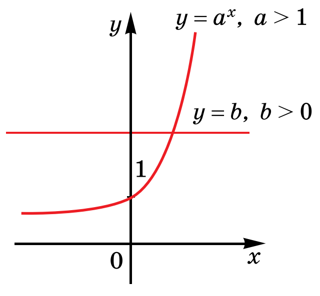
Розглянемо деякі види показникових рівнянь і методи їх розв'язування.

1. Найпростіші показникові рівняння

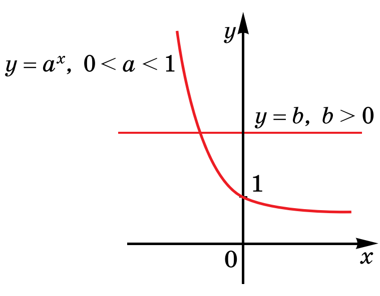
Розглянемо найпростіше показникове рівняння виду

$$a^x = b\ (a > 0,\ a \neq 1).$$

Оскільки $a^x > 0$ для всіх значень x, то у випадку $b \leqslant 0$ рівняння розв'язків не має. Якщо $b > 0$, то визначимо кількість коренів рівняння $a^x = b$ графічним способом. У випадку $a > 1$ функція $y = a^x$ монотонно зростає на R, а у випадку $0 < a < 1$ – монотонно спадає на R (мал. 2.1 і 2.2).



Мал. 2.1



Мал. 2.2

В обох випадках функція $y = a^x$ кожне своє додатне значення приймає лише один раз. Тому графіки функцій $y = a^x$ і $y = b$, де $b > 0$, перетинаються в одній точці. Це означає, що рівняння $a^x = b$ при $b > 0$ має єдиний розв'язок.

Для того щоб знайти цей розв'язок, треба число b подати у вигляді $b = a^c$. Матимемо рівняння

$$a^x = a^c.$$

Звідси отримаємо $x = c$.

Задача 1. Розв'язати рівняння:

1) $2^x = 32$; 2) $3^{x-1} = \sqrt[5]{9}$; 3) $4^{x^2-2x} = 1$.

Розв'язання. 1) $2^x = 32$; $2^x = 2^5$; $x = 5$.

2) $3^{x-1} = \sqrt[5]{9}$; $3^{x-1} = (3^2)^{\frac{1}{5}}$; $3^{x-1} = 3^{\frac{2}{5}}$; $x-1 = \frac{2}{5}$; $x = 1\frac{2}{5}$.

3) $4^{x^2-2x} = 1$; $4^{x^2-2x} = 4^0$; $x^2 - 2x = 0$; $x(x - 2) = 0$; $x_1 = 0$; $x_2 = 2$.

Відповідь. 1) 5; 2) $1\frac{2}{5}$; 3) 0; 2.

Зауважимо, що поки ми можемо розв'язувати не всі рівняння виду $a^x = b$. Так, наприклад, не можемо розв'язати такі рівняння, як $2^x = 5$, $3^x = 7$ тощо. Розв'язування подібних рівнянь буде розглянуто в одному з наступних параграфів.

Метод розв'язування рівняння виду $a^x = a^c$ можна узагальнити:

при $a > 0$, $a \neq 1$ рівняння $a^{f(x)} = a^{g(x)}$ рівносильне рівнянню $f(x) = g(x)$.

Задача 2. Розв'язати рівняння:

1) $4^x = 8^{x-1}$; 2) $2^x \cdot 3^x = \left(\frac{1}{6}\right)^{5-2x}$.

Розв'язання. 1) Зведемо обидві частини рівняння до степеня з однією і тією самою основою. Такою основою є число 2. Маємо: $(2^2)^x = (2^3)^{x-1}$; $2^{2x} = 2^{3x-3}$. Звідси $2x = 3x - 3$; $x = 3$.

2) Оскільки $2^x \cdot 3^x = 6^x$, а $\left(\frac{1}{6}\right)^{5-2x} = (6^{-1})^{5-2x} = 6^{2x-5}$, то початкове рівняння рівносильне такому: $6^x = 6^{2x-5}$. Звідси $x = 2x - 5$; $x = 5$.

Відповідь. 1) 3; 2) 5.

2. Зведення показникових рівнянь до найпростіших способом винесення спільного множника за дужки

Цей спосіб можна використовувати у випадку, коли рівняння містить кілька виразів виду a^{x+m}, де m – різні числа. Тоді використовуємо формулу $a^{x+m} = a^x \cdot a^m$ та виносимо за дужки спільний множник. Після спрощень отримаємо рівняння виду $a^x = b$.

Задача 3. Розв'язати рівняння

$$12 \cdot 5^{x-1} + 3 \cdot 5^x - 5^{x+1} = 10.$$

Розв'язання. $12 \cdot 5^x \cdot 5^{-1} + 3 \cdot 5^x - 5^x \cdot 5^1 = 10$;

$5^x\left(12\cdot\frac{1}{5}+3-5\right)=10;\ 5^x\cdot\frac{2}{5}=10;\ 5^x=10:\frac{2}{5};\ 5^x=25;\ 5^x=5^2;$
$x=2.$
Відповідь. 2.

3. Рівняння виду $a^{f(x)}=b^{f(x)}$, де $a>0$, $a\neq1$, $b>0$, $b\neq1$

Поділимо ліву і праву частини рівняння $a^{f(x)}=b^{f(x)}$ на $b^{f(x)}\neq0$. Тоді $\left(\frac{a}{b}\right)^{f(x)}=1$, тобто $\left(\frac{a}{b}\right)^{f(x)}=\left(\frac{a}{b}\right)^0$, а отже, $f(x)=0$.

Задача 4. Розв'язати рівняння $2^{x-1}=5^{x-1}$.

Розв'язання. Поділимо ліву і праву частини рівняння на $5^{x-1}\neq0$. Маємо: $\frac{2^{x-1}}{5^{x-1}}=1;\ \left(\frac{2}{5}\right)^{x-1}=\left(\frac{2}{5}\right)^0;\ x-1=0;\ x=1.$
Відповідь. 1.

4. Заміна змінних у показникових рівняннях

Досить часто показникове рівняння можна звести до алгебраїчного за допомогою заміни $t=a^{f(x)}$, зауважимо, що $t>0$.

Задача 5. Розв'язати рівняння $3\cdot25^x-2\cdot5^x=1$.

Розв'язання. Нехай $5^x=t>0$, тоді $25^x=5^{2x}=(5^x)^2=t^2$.
Маємо: $3t^2-2t-1=0;\ t_1=1;\ t_2=-\frac{1}{3}$ – не задовольняє умову $t>0$.
Отже, $5^x=1;\ 5^x=5^0;\ x=0.$
Відповідь. 0.

Задача 6. Розв'язати рівняння $\frac{5}{2^{\sqrt{x}}+1}+2=\frac{6}{2^{\sqrt{x}}-2}$.

Розв'язання. Нехай $2^{\sqrt{x}}=t,\ t>0$, тоді $\frac{5}{t+1}-\frac{6}{t-2}+2=0$.
Розв'язавши останнє рівняння, маємо $t_1=4;\ t_2=-2{,}5$ – не задовольняє умову $t>0$. Тоді $2^{\sqrt{x}}=4;\ 2^{\sqrt{x}}=2^2;\ \sqrt{x}=2;\ x=4.$
Відповідь. 4.

5. Однорідні показникові рівняння

Рівняння виду

$$Aa^{2f(x)}+Ba^{f(x)}b^{f(x)}+Cb^{2f(x)}=0$$

є *однорідним показниковим рівнянням другого степеня.*

Метод розв'язування такого рівняння полягає в діленні лівої та правої частин на $b^{2f(x)}\neq0$ (або на $a^{2f(x)}\neq0$). Тоді маємо

$$A\left(\frac{a}{b}\right)^{2f(x)}+B\left(\frac{a}{b}\right)^{f(x)}+C=0.$$

Далі заміна $\left(\frac{a}{b}\right)^{f(x)}=t>0.$

Задача 7. Розв'язати рівняння $2^{2x}+6^x-2\cdot 9^x=0$.

Розв'язання. Оскільки $6^x=2^x\cdot 3^x$, а $9^x=(3^2)^x=3^{2x}$, то рівняння зводиться до однорідного: $2^{2x}+2^x\cdot 3^x-2\cdot 3^{2x}=0$. Ділимо ліву і праву частини рівняння на $3^{2x}\neq 0$. Маємо:

$$\frac{2^{2x}}{3^{2x}}+\frac{2^x\cdot 3^x}{3^{2x}}-2\frac{3^{2x}}{3^{2x}}=0;\ \left(\frac{2}{3}\right)^{2x}+\left(\frac{2}{3}\right)^{x}-2=0.$$

Нехай $\left(\frac{2}{3}\right)^{x}=t>0$, тоді $\left(\frac{2}{3}\right)^{2x}=\left(\left(\frac{2}{3}\right)^{x}\right)^2=t^2$.

Отже, $t^2+t-2=0$; $t_1=1$; $t_2=-2$.

Оскільки $t>0$, то $t=-2$ – не підходить. Отже, $t=1$,

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{x}=1;\ \left(\frac{2}{3}\right)^{x}=\left(\frac{2}{3}\right)^{0};\ x=0.$$

Відповідь. 0.

- Які рівняння називають показниковими? - Як розв'язати рівняння виду $a^x=b$? - Як можна зводити показникові рівняння до найпростіших винесенням спільного множника за дужки? - Як розв'язати рівняння виду $a^{f(x)}=b^{f(x)}$? - Яку заміну змінних використовують у показникових рівняннях? - Який вид мають однорідні показникові рівняння і як їх розв'язують?

Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

1 Розв'яжіть рівняння (**2.1–2.6**):

2.1. 1) $3^x=9$; 2) $4^x=1$; 3) $2^x=32$; 4) $7^x=-7$.

2.2. 1) $5^x=5$; 2) $7^x=49$; 3) $9^x=-9$; 4) $4^x=64$.

2.3. 1) $\left(\frac{1}{3}\right)^x=\frac{1}{27}$; 2) $\left(\frac{1}{8}\right)^x=0$; 3) $2^{x+1}=16$; 4) $6^{x-1}=6$.

2.4. 1) $\left(\frac{1}{2}\right)^x=\frac{1}{8}$; 2) $\left(\frac{1}{7}\right)^x=0$; 3) $3^{x-1}=27$; 4) $12^{x+1}=12$.

2.5. 1) $4^{x+1}=4^{2x}$; 2) $5^{2x-3}=5^x$.

2.6. 1) $7^{x+3}=7^{2x}$; 2) $8^x=8^{2x-5}$.

2 Розв'яжіть рівняння (**2.7–2.14**):

2.7. 1) $3^x = \dfrac{1}{9}$; 2) $5^x = \sqrt{5}$; 3) $7^x = \sqrt[3]{49}$; 4) $\left(\dfrac{2}{3}\right)^x = 1,5$.

2.8. 1) $2^x = \dfrac{1}{16}$; 2) $7^x = \sqrt{7}$; 3) $3^x = \sqrt[5]{9}$; 4) $\left(\dfrac{2}{5}\right)^x = 2,5$.

2.9. 1) $2^x = 5^x$; 2) $3^{x-1} = 7^{x-1}$.

2.10. 1) $3^x = 8^x$; 2) $2^{x+1} = 5^{x+1}$.

2.11. 1) $4^{x^2+2x-3} = 1$; 2) $3^{x^2-x} = 9$;

3) $\left(\dfrac{1}{5}\right)^{x^2+2x} = \left(\dfrac{1}{5}\right)^{4-x}$; 4) $7^{x^2} = 49$.

2.12. 1) $7^{x^2-x-2} = 1$; 2) $4^{x^2+2x} = 64$;

3) $\left(\dfrac{1}{8}\right)^{x^2-2x} = \left(\dfrac{1}{8}\right)^{2-3x}$; 4) $2^{x^2} = 8$.

2.13. 1) $\left(\dfrac{4}{5}\right)^x = \dfrac{25}{16}$; 2) $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{x-2} = 27$;

3) $\left(\dfrac{2}{9}\right)^{x-3} = 4,5^{x+2}$; 4) $\left(\sqrt{5}\right)^{x+2} = 25^x$.

2.14. 1) $\left(\dfrac{3}{4}\right)^x = \dfrac{64}{27}$; 2) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{2+x} = 32$;

3) $3,5^{x-2} = \left(\dfrac{2}{7}\right)^{x+1}$; 4) $\left(\sqrt{3}\right)^{x-3} = 9^x$.

2.15. Знайдіть точку перетину графіків функцій $y = \left(\dfrac{1}{7}\right)^x$ і $y = 7$.

2.16. Знайдіть точку перетину графіків функцій $y = 3^x$ і $y = \dfrac{1}{3}$.

Розв'яжіть рівняння (**2.17–2.22**):

2.17. 1) $16^{-x} = 32$; 2) $(5^{x-2})^{x-5} = 1$;

3) $(4^{x-4})^{x-2} = \dfrac{1}{4}$; 4) $\left(\dfrac{4}{5}\right)^x \cdot \left(\dfrac{3}{2}\right)^x = \dfrac{6}{5}$.

2.18. 1) $9^{-x} = 81$; 2) $(4^{x+3})^{x-2} = 1$;

3) $(2^{x-6})^{x-3} = \dfrac{1}{4}$; 4) $\left(\dfrac{2}{3}\right)^x \cdot \left(\dfrac{27}{8}\right)^x = \dfrac{9}{4}$.

2.19. 1) $3^{x-1} + 3^x = 12$; 2) $4^{x-1} + 4^{x+1} = 17$.

2.20. 1) $2^{x+2} + 2^x = 10$; 2) $5^{x-1} + 5^{x+1} = 130$.

2.21. 1) $2^{2x} - 3 \cdot 2^x + 2 = 0$; 2) $9^x + 2 \cdot 3^x - 99 = 0$.

2.22. 1) $3^{2x} - 4 \cdot 3^x + 3 = 0$; 2) $4^x - 5 \cdot 2^x - 24 = 0$.

3 Розв'яжіть рівняння (**2.23–2.32**):

2.23. 1) $3^x \cdot 2^{x+3} = 288$; 2) $5^{x-1} \cdot 2^{x+2} = 800$.

2.24. 1) $5^x \cdot 2^{x+2} = 400$; 2) $3^{x+1} \cdot 4^{x-2} = 324$.

2.25. 1) $\sqrt{3^{2x}} \cdot \sqrt{2^{2x}} = 216$; 2) $\sqrt{3^x} = 27^{-\frac{2}{3}}$;

3) $\frac{1}{27}\sqrt{3^{x-1}} = 9^{-1,25}$; 4) $\left(\sin\frac{\pi}{3}\right)^{2x-2} = \frac{3}{4}$.

2.26. 1) $\sqrt{5^{2x}} \cdot \sqrt{2^{2x}} = 10$; 2) $\sqrt{2^x} = 4^{-\frac{3}{2}}$;

3) $\frac{1}{27}\sqrt{9^{x-1}} = \left(\frac{1}{9}\right)^{-\frac{1}{2}}$; 4) $\left(\cos\frac{\pi}{3}\right)^{2x-1} = \sqrt{8}$.

2.27. 1) $4^{x^2+2x} = 5^{x^2+2x}$; 2) $7^{2-x} = 4^{x-2}$.

2.28. 1) $2^{x^2-3x} = 5^{x^2-3x}$; 2) $5^{x-1} = 12^{1-x}$.

2.29. 1) $2 \cdot 3^{2x} - 5 \cdot 3^{2x-3} + 4 \cdot 3^{2x-4} = 151$;
2) $0{,}2^{3-2x} + 5 \cdot 0{,}04^{1-x} = 130$.

2.30. 1) $5 \cdot 2^{3x} - 3 \cdot 2^{3x-2} + 4 \cdot 2^{3x-4} = 36$;
2) $0{,}5^{5-2x} + 4 \cdot 0{,}25^{1-x} = 66$.

2.31. 1) $2^x - 6 \cdot 2^{-x} = -1$; 2) $2^{2x-2} + 5 \cdot 2^{x-1} + 4 = 0$;

3) $\left(\frac{1}{5}\right)^x + 5^{x+2} = 10$; 4) $2 + \frac{1}{4^x - 3} = \frac{1}{4^x + 2}$.

2.32. 1) $3^x - 6 \cdot 3^{-x} = 1$; 2) $3^{2x+2} - 4 \cdot 3^{x+1} + 3 = 0$;

3) $\left(\frac{1}{2}\right)^x + 2^{x+3} = 6$; 4) $\frac{5}{9^x - 2} - 3 = \frac{4}{9^x - 1}$.

Розв'яжіть однорідне рівняння (**2.33–2.34**):

2.33. $2 \cdot 5^{2x} - 7 \cdot 5^x \cdot 2^x + 5 \cdot 2^{2x} = 0$.

2.34. $2 \cdot 3^{2x} - 5 \cdot 3^x \cdot 2^x + 3 \cdot 2^{2x} = 0$.

4 Розв'яжіть рівняння (**2.35–2.38**):

2.35. 1) $2^{x-1} + 2^x + 2^{x+1} = 6^{x-1} + 6^x$; 2) $9^{x+\frac{1}{2}} - 2^{x+1} = 2^{x+4} - 3^{2x}$.

2.36. 1) $3^x + 3^{x+1} + 3^{x+2} = 12^x + 12^{x+1}$;
2) $4^{x+\frac{1}{2}} - 3^{x+1} = 3^{x+2} - 7 \cdot 2^{2x}$.

2.37. 1) $8^{1+x^2} - 8^{1-x^2} = 63$; 2) $9^x - 2 \cdot 4^x + 6^x = 0$.

2.38. 1) $3^{2+x^2} - 3^{2-x^2} = 24$; 2) $25^x + 3 \cdot 10^x - 4 \cdot 4^x = 0$.

Життєва математика

2.39. Військовий збір у 2018 році складав 1,5 % від заробітної плати. Заробітна плата директора кав'ярні «Патріот» протягом року становила 12 000 грн щомісяця, кожного з трьох його бариста – 9000 грн щомісяця, а офіціантки – 8000 грн щомісяця. Крім військового збору, щомісяця у благодійний фонд на підтримку української армії директор підприємства перераховував 800 грн, кожний з його бариста – по 600 грн, а офіціантка – 400 грн. Якою є загальна суму коштів, що сплатили робітники кав'ярні у 2018 році на потреби української армії?

2.40. Одна пігулка ліків важить 20 мг і містить 5 % активної речовини. Дитині віком до 6 місяців лікар прописує 0,4 мг активної речовини на кожен кілограм маси тіла на добу. Скільки пігулок цих ліків слід дати чотиримісячній дитині з масою 5 кг протягом доби?

Підготуйтеся до вивчення нового матеріалу

Розв'яжіть нерівність **(2.41–2.42)**:

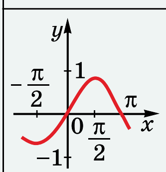
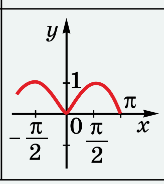
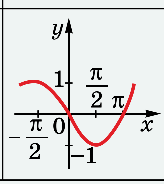
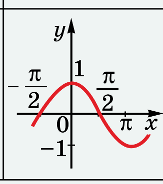
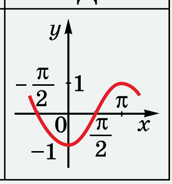
2.41. 1) $3x \geqslant 9$; 2) $-2x < 8$; 3) $4x > 0$;
4) $-5x \leqslant 0$; 5) $x^2 - 2x > 0$; 6) $x^2 - 2x - 3 \leqslant 0$.

2.42. 1) $1 + 2x \geqslant 9$; 2) $6 - 2x \leqslant 5$;
3) $2(3 + x) + (4 - x) \leqslant 0$; 4) $5(x + 8) + 4(1 - x) > 0$;
5) $2x^2 - 3x \geqslant 2(x - 1)$; 6) $4x(x + 2) < 5$.

Перевірте свою компетентність!

Завдання № 2

1. Укажіть графік функції $y = \cos(x - 2\pi)$.

А	Б	В	Г	Д
				

2. Яка з наведених функцій спадає на $(-\infty; +\infty)$?

А	Б	В	Г	Д
$y = 2x - 7$	$y = \mathrm{ctg}\,x$	$y = \sin x$	$y = 7^x$	$y = \left(\frac{1}{7}\right)^x$

3. Знайдіть $f'(1)$, якщо $f(x) = \dfrac{6}{x^2}$.

А	Б	В	Г	Д
6	–6	12	–12	інша відповідь

4. Робітник отримав аванс у розмірі 3600 грн, що становить 40 % від його заробітної плати. Якою є заробітна плата робітника?

А	Б	В	Г	Д
8000 грн	8500 грн	9000 грн	9500 грн	10 500 грн

5. Яке рівняння має безліч розв'язків?

А	Б	В	Г	Д
$2x - 7 = 9$	$\cos x = \sqrt{2}$	$\sin x = 1$	$x^2 + 2x - 7 = 0$	$2x - 1 = 2x$

6. Яка з наведених функцій є парною?

А	Б	В	Г	Д
$y = x\sin x$	$y = x + \sin x$	$y = x - \sin x$	$y = \sqrt{\sin x}$	$y = \dfrac{1}{\sin x}$

7. Установіть відповідність між формулою зведення (1–4) та виразом, що їй тотожно дорівнює (А–Д).

Формула зведення	*Вираз, що їй тотожно дорівнює*
1 $\sin(\pi - \alpha)$	**А** 1
2 $\sin\left(\dfrac{3\pi}{2} + \alpha\right)$	**Б** $-\sin\alpha$
3 $\cos(2\pi + \alpha)$	**В** $-\cos\alpha$
4 $\cos\left(\dfrac{3\pi}{2} - \alpha\right)$	**Г** $\cos\alpha$
	Д $\sin\alpha$

	А	Б	В	Г	Д
1					
2					
3					
4					

8. Прибуток деякого підприємства прямо пропорційний кількості виробленої продукції. На підприємстві робочий день зменшився з 8 год до 7 год. На скільки відсотків треба підвищити продуктивність праці, щоб прибуток підприємства зріс на 5 %?

9. Чому дорівнює на проміжку [–1; 1] найбільше значення функції $f(x) = x^3 - 3x^2 - 2$?

§ 3. ПОКАЗНИКОВІ НЕРІВНОСТІ

Аналогічно рівнянню *нерівність* називають *показниковою*, якщо змінна входить лише до показників степенів.

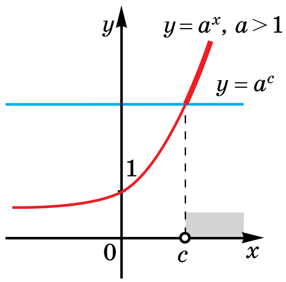
Приклади показникових нерівностей:

$$3^x \geqslant 9,\ 2^x + 2^{x-1} < 6 \text{ тощо.}$$

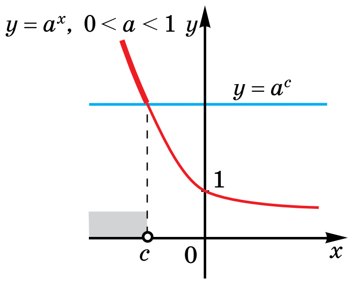
1. Найпростіші показникові нерівності

До найпростіших показникових нерівностей можна віднести такі: $a^x > b$, $a^x < b$, $a^x \geqslant b$, $a^x \leqslant b$, де $a > 0$, $a \neq 1$, b – число.

Розглянемо для прикладу нерівність $a^x > b$, де $a > 0$, $a \neq 1$ і $b > 0$. Нехай $b = a^c$, тоді $a^x > a^c$. Якщо $a > 1$, то функція $y = a^x$ зростає (мал. 3.1) і більшому значенню функції відповідає більше значення аргументу. Тому з нерівності $a^x > a^c$ отримуємо $x > c$ (знак нерівності не змінюється).



Мал. 3.1



Мал. 3.2

Якщо $0 < a < 1$, то функція $y = a^x$ – спадна (мал. 3.2) і більшому значенню функції відповідає менше значення аргументу. Тому з нерівності $a^x > a^c$ отримуємо $x < c$ (знак нерівності змінюється на протилежний).

Аналогічно можна розв'язати нерівність виду $a^x < b$, $a^x \geqslant b$, $a^x \leqslant b$, де $b > 0$. Якщо $b \leqslant 0$, то деякі з наведених нерівностей не будуть мати розв'язків, а розв'язками деяких буде множина R.

Задача 1. Розв'язати нерівність:

1) $2^x \geqslant 4$; 2) $\left(\frac{1}{3}\right)^x < \frac{1}{27}$; 3) $3^x > -9$; 4) $\left(\frac{1}{4}\right)^x \leqslant -5$.

Розв'язання. 1) $2^x \geqslant 2^2$. Оскільки $y = 2^x$ – функція зростаюча, то маємо $x \geqslant 2$.

2) $\left(\frac{1}{3}\right)^x < \left(\frac{1}{3}\right)^3$. Оскільки $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ – функція спадна, то маємо $x > 3$.

3) Оскільки $3^x > 0$ для всіх значень x, то розв'язками даної нерівності є всі числа: $x \in R$.

4) Оскільки $\left(\frac{1}{4}\right)^x > 0$ для всіх значень x, то дана нерівність не має розв'язків.

Відповідь. 1) $x \geqslant 2$; 2) $x > 3$; 3) $x \in R$; 4) немає розв'язків.

Метод розв'язування нерівності $a^x > b$, де $b = a^c$, можна узагальнити для нерівності виду $a^{f(x)} > a^{g(x)}$. Подамо метод розв'язування такої нерівності у вигляді таблиці.

$a^{f(x)} > a^{g(x)}$	
$0 < a < 1$	$a > 1$
Знак нерівності змінюється на протилежний $f(x) < g(x)$	Знак нерівності не змінюється $f(x) > g(x)$

Аналогічно розв'язується нерівність виду $a^{f(x)} \geqslant a^{g(x)}$.

Задача 2. Розв'язати нерівність:

1) $2^{2x-3} > 4^{5-x}$; 2) $\left(\frac{1}{3}\right)^{x^2-2x} \leqslant \left(\frac{1}{3}\right)^{x+4}$.

Розв'язання. 1) $2^{2x-3} > (2^2)^{5-x}$; $2^{2x-3} > 2^{10-2x}$; $2x - 3 > 10 - 2x$; $4x > 13$; $x > 3{,}25$.

2) Оскільки $0 < \frac{1}{3} < 1$, то маємо:

$$x^2 - 2x \geqslant x + 4;\ x^2 - 3x - 4 \geqslant 0.$$

Розв'язавши останню нерівність, отримаємо $x \leqslant -1$ або $x \geqslant 4$.

Відповідь. 1) $x > 3{,}25$; 2) $x \leqslant -1$ або $x \geqslant 4$.

2. Розв'язування складніших показникових нерівностей

Під час розв'язування складніших показникових нерівностей використовують ті самі прийоми, що й під час розв'язування рівнянь: спосіб винесення за дужки спільного множника, заміну змінних тощо, намагаючися зводити нерівності до найпростіших.

Задача 3. Розв'язати нерівність $3^{x+2} - 3^x > 24$.

Розв'язання. $3^x \cdot 3^2 - 3^x > 24$; $3^x(9 - 1) > 24$; $3^x \cdot 8 > 24$; $3^x > 3$; $3^x > 3^1$; $x > 1$.

Відповідь. $x > 1$.

Задача 4. Розв'язати нерівність $\left(\frac{1}{3}\right)^{2x} + 2\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{x} - 3 > 0.$

Розв'язання. Нехай $\left(\frac{1}{3}\right)^{x} = t$, тоді $t^2 + 2t - 3 > 0$. Розв'язавши останню нерівність, отримаємо $t < -3$ або $t > 1$. Повертаємося до змінної x:

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{x} < -3 \quad \text{або} \quad \left(\frac{1}{3}\right)^{x} > 1.$$

Немає розв'язків	$\left(\frac{1}{3}\right)^{x} > \left(\frac{1}{3}\right)^{0}$ $x < 0$

Відповідь. $x < 0$.

● Які нерівності називають показниковими? ● Як розв'язати нерівність виду $a^x > b$, де $b = a^c$, при $a > 1$; при $0 < a < 1$? ● До якої нерівності зводиться нерівність $a^{f(x)} > a^{g(x)}$, якщо $a > 1$; якщо $0 < a < 1$?

Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

1 Розв'яжіть нерівність (**3.1–3.8**):

3.1. 1) $2^x > 2^5$; 2) $3^x \leqslant 3^{-7}$;

3) $\left(\frac{1}{2}\right)^{x} \geqslant \left(\frac{1}{2}\right)^{5}$; 4) $\left(\frac{4}{7}\right)^{x} < \left(\frac{4}{7}\right)^{2}$.

3.2. 1) $3^x < 3^8$; 2) $5^x \geqslant 5^{-3}$;

3) $\left(\frac{1}{4}\right)^{x} \leqslant \left(\frac{1}{4}\right)^{2}$; 4) $\left(\frac{2}{3}\right)^{x} > \left(\frac{2}{3}\right)^{4}$.

2 **3.3.** 1) $3^x \geqslant 27$; 2) $(1{,}2)^x < 1{,}44$;

3) $\left(\frac{1}{8}\right)^{x} > \frac{1}{64}$; 4) $\left(\frac{1}{7}\right)^{x} \leqslant 1$.

3.4. 1) $2^x \leqslant 32$; 2) $1{,}3^x > 1{,}69$; 3) $\left(\frac{1}{3}\right)^{x} < \frac{1}{27}$; 4) $\left(\frac{1}{8}\right)^{x} \geqslant 1$.

3.5. 1) $\left(\frac{1}{4}\right)^{x} \geqslant 16$; 2) $(\sqrt{3})^x < \frac{1}{3}$; 3) $0{,}2^x \leqslant 25$; 4) $0{,}7^x > 1\frac{3}{7}$.

3.6. 1) $\left(\frac{1}{3}\right)^{x} < 27$; 2) $(\sqrt{5})^x \geqslant \frac{1}{\sqrt{5}}$; 3) $0{,}5^x > 4$; 4) $0{,}6^x \leqslant 1\frac{2}{3}$.

3.7. 1) $4^{2x-7} > 1$; 2) $5^{3x+1} \geqslant 25$; 3) $\left(\frac{1}{8}\right)^{-2x} < 4$; 4) $2^{x^2+1} \leqslant 32$.

3.8. 1) $5^{3x-4} < 1$; 2) $4^{2x+1} \leqslant 64$;
3) $\left(\frac{1}{27}\right)^{-3x} > 9$; 4) $5^{x^2-1} \geqslant 125$.

Знайдіть область визначення функції (**3.9–3.10**):

3.9. 1) $y = \sqrt{16 - 2^x}$; 2) $y = \sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^x - 1}$.

3.10. 1) $y = \sqrt{3^x - 9}$; 2) $y = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{8}\right)^x}$.

Розв'яжіть нерівність (**3.11–3.12**):

3.11. 1) $\left(\cos\frac{\pi}{3}\right)^{x-3,5} > \sqrt{8}$; 2) $9^{0,5x^2-3} \geqslant 27$;
3) $\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2+2x} < \frac{1}{8}$; 4) $\left(\frac{1}{5}\right)^{|x|-2} \geqslant 5$.

3.12. 1) $\left(\sin\frac{\pi}{6}\right)^{2,5-x} \geqslant \sqrt{2}$; 2) $4^{0,5x^2-3} < 8$;
3) $\left(\frac{1}{3}\right)^{x^2-x} > \frac{1}{9}$; 4) $\left(\frac{1}{7}\right)^{|x|-3} \leqslant 7$.

Знайдіть область визначення функції (**3.13–3.14**):

3.13. 1) $y = \sqrt{4^x - 2^{x+5}}$; 2) $y = \sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^{2x-3} - \left(\frac{1}{8}\right)^x}$.

3.14. 1) $y = \sqrt{3^{x+7} - 9^x}$; 2) $y = \sqrt{\left(\frac{1}{125}\right)^x - \left(\frac{1}{25}\right)^{2x-5}}$.

Розв'яжіть нерівність (**3.15–3.20**):

3.15. 1) $5^x + 5^{x-2} \geqslant 26$; 2) $\left(\frac{1}{2}\right)^x - \left(\frac{1}{2}\right)^{x-2} < -24$.

3.16. 1) $3^{x+1} + 3^x > 36$; 2) $\left(\frac{1}{5}\right)^{x-1} - \left(\frac{1}{5}\right)^x \leqslant 100$.

3.17. 1) $4^x - 2^x - 12 \geqslant 0$; 2) $\left(\frac{1}{9}\right)^x - 4\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^x + 3 < 0$.

3.18. 1) $4^x - 6 \cdot 2^x + 8 \leqslant 0$; 2) $\left(\frac{1}{25}\right)^x + \left(\frac{1}{5}\right)^x - 2 > 0$.

4 **3.19.** 1) $\dfrac{4^x-8}{2x^2+5} \geqslant 0$; 2) $\dfrac{0{,}3^x-0{,}027}{-x^2-5} < 0$.

3.20. 1) $\dfrac{25^x-5}{x^2+17} \leqslant 0$; 2) $\dfrac{0{,}1^x-0{,}01}{-2x^2-9} > 0$.

3.21. Розв'яжіть нерівність $7^{x+1} - 2 \cdot 7^x < 5^{x+3} - 118 \cdot 5^x$.

3.22. Розв'яжіть нерівність $5^{x+1} - 2 \cdot 5^x > 3^{x+2} - 2 \cdot 3^{x-1}$.

3.23. Розв'яжіть нерівність $3 \cdot 4^x - 5 \cdot 6^x + 2 \cdot 9^x \leqslant 0$.

3.24. Розв'яжіть нерівність $2 \cdot 4^x - 5 \cdot 6^x + 3 \cdot 9^x \geqslant 0$.

3.25. Розв'яжіть графічно нерівність $3^x \geqslant 4 - x$.

3.26. Розв'яжіть графічно нерівність $2^x < 3 - x$.

Життєва математика

3.27. Катерина Ощадлива для роботи використовувала власний автомобіль, який потребує 8,8 л бензину на 100 км. Компанія вирішила придбати автомобіль, який споживає 3,8 л на 100 км.
1) Скільки літрів бензину заощадить Катерина за день роботи на новому автомобілі, коли щодня вона проїжджає в середньому 60 км?
2) Скільки грошей заощадить Катерина щодня, якщо один літр бензину коштує 28 грн?

3.28. Улітку учні школи заготовляють для шкільного буфету 8 кг квітів липи.

1) Скільки склянок чаю можна буде заварити, якщо на один стакан іде 2 г квітів?
2) На скільки днів вистачить заготовки квітів липи, якщо за один день липовий чай купують 100 осіб?

Перевірте свою компетентність!

Завдання № 3

1. Знайдіть проміжок спадання функції $y = 2x^3 - 3x^2$.

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty; 0]$	$[0; 1]$	$[1; +\infty)$	$(-\infty; 1]$	$[0; +\infty)$

2. Яку цифру з наведених треба поставити замість зірочки в числі $\overline{1234^*}$, щоб воно ділилося на 3 без остачі?

А	Б	В	Г	Д
1	3	5	7	9

3. Скоротіть дріб $\dfrac{x^2-9}{x^2+6x+9}$.

А	Б	В	Г	Д
$-\dfrac{1}{6x}$	$\dfrac{x+3}{x-3}$	1	$\dfrac{x-3}{x+3}$	скоротити неможливо

4. При яких значеннях a і b, відмінних від нуля, виконується рівність $\sqrt{a\cdot b}=\sqrt{-a}\cdot\sqrt{-b}$?

А	Б	В	Г	Д
$a>0$, $b>0$	$a>0$, $b<0$	$a<0$, $b>0$	$a<0$, $b<0$	ні при яких

5. Обчисліть $4\sin\dfrac{\pi}{6}+2\cos\dfrac{2\pi}{3}$.

А	Б	В	Г	Д
0	1	2	3	4

6. Скільки коренів має рівняння $2\cdot 7^x+14=0$?

А	Б	В	Г	Д
0	1	2	3	понад 3

7. Установіть відповідність між функцією $y=f(x)$ (1–4) та її значенням при $x=2$ (А–Д).

Функція

1 $f(x)=\dfrac{x^2-9}{x+3}$

2 $f(x)=x^2+x-5$

3 $f(x)=\dfrac{x^3+1}{x^2-x+1}$

4 $f(x)=\dfrac{3x-9}{x}\cdot\dfrac{x}{x^2-6x+9}$

Значення функції

А -3

Б -1

В 0

Г 1

Д 3

	А	Б	В	Г	Д
1					
2					
3					
4					

8. Знайдіть найбільше ціле число, що належить області визначення функції $y=\sqrt{3x-x^2}$.

9. Обчисліть суму десяти перших членів арифметичної прогресії a_n, у якої $a_2=9$, $a_4=15$.

§ 4. ЛОГАРИФМИ ТА ЇХ ВЛАСТИВОСТІ

В одному з попередніх параграфів ви навчилися розв'язувати рівняння $a^x = b$ у випадку, коли число b можна подати у вигляді $b = a^c$, де c – раціональне число. У цьому параграфі розглянемо, як розв'язується рівняння $a^x = b$ в інших випадках. Для цього потрібно ввести поняття *логарифма*.

1. Логарифм

Повернемося до рівняння $a^x = b$, де $a > 0$, $a \neq 1$, яке має розв'язок при $b > 0$. Цей розв'язок – число x – називають *логарифмом числа b за основою a* та записують так: $\log_a b$.

Логарифмом числа b за основою a **називають показник степеня, до якого треба піднести *a*, щоб отримати *b*.**

Приклад 1.

1) $\log_2 32 = 5$ (оскільки $2^5 = 32$).

2) $\log_3 \sqrt{3} = \dfrac{1}{2}$ (оскільки $3^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$).

3) $\log_5 \dfrac{1}{5} = -1 \left(\text{оскільки } 5^{-1} = \dfrac{1}{5}\right)$.

4) $\log_7 \dfrac{1}{\sqrt{7}} = -\dfrac{1}{2} \left(\text{оскільки } 7^{-\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{7}}\right)$.

Оскільки рівняння $a^x = b$ розглядається для $a > 0$, $a \neq 1$, то число a – основа логарифма – є числом додатним і відмінним від 1. Число b, як було зазначено вище, – додатне. Отже,

вираз $\log_a b$ має зміст, якщо $a > 0$, $a \neq 1$ і $b > 0$.

Використовуючи означення логарифма, тепер можемо розв'язувати будь-яке показникове рівняння виду $a^x = b$, де $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$.

Задача 1. Розв'язати рівняння: 1) $3^x = 5$; 2) $7^{x-1} = 19$.

Розв'язання. 1) За означенням логарифма: $x = \log_3 5$.
2) Маємо $x - 1 = \log_7 19$, звідси $x = 1 + \log_7 19$.
Відповідь. 1) $\log_3 5$; 2) $1 + \log_7 19$.

Оскільки $\log_a b$ – розв'язок рівняння $a^x = b$, де $a > 0$, $a \neq 1$ і $b > 0$, тобто $x = \log_a b$, то маємо:

$$a^{\log_a b} = b.$$

Цю формулу називають *основною логарифмічною тотожністю*. Її використовують для обчислення виразів з логарифмами, доведення властивостей логарифмів тощо.

Задача 2. Обчислити: 1) $3^{\log_3 7}$; 2) $5^{2\log_5 3}$.

Розв'язання. 1) $3^{\log_3 7} = 7$; 2) $5^{2\log_5 3} = (5^{\log_5 3})^2 = 3^2 = 9$.

Відповідь. 1) 7; 2) 9.

2. *Основні властивості логарифмів*

Крім основної логарифмічної тотожності, є ще кілька важливих *властивостей логарифмів*. Розглянемо їх.

Теорема (основні властивості логарифмів). **Для будь-якого $a > 0$, $a \neq 1$ і $x > 0$, $y > 0$ виконуються рівності:**

$$\mathbf{1.}\ \log_a 1 = 0.$$
$$\mathbf{2.}\ \log_a a = 1.$$
$$\mathbf{3.}\ \log_a xy = \log_a x + \log_a y.$$
$$\mathbf{4.}\ \log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y.$$
$$\mathbf{5.}\ \log_a x^p = p\log_a x,\ p \in R.$$

Доведення.

1) $\log_a 1 = 0$ (оскільки $a^0 = 1$).

2) $\log_a a = 1$ (оскільки $a^1 = a$).

3) За основною логарифмічною тотожністю $x = a^{\log_a x}$, $y = a^{\log_a y}$. Перемножимо ці рівності почленно: $xy = a^{\log_a x} \times$ $\times\, a^{\log_a y}$, тобто $xy = a^{\log_a x + \log_a y}$. За означенням логарифма:

$$\log_a xy = \log_a x + \log_a y.$$

4) Поділимо почленно рівності $x = a^{\log_a x}$ і $y = a^{\log_a y}$. Маємо $\frac{x}{y} = \frac{a^{\log_a x}}{a^{\log_a y}} = a^{\log_a x - \log_a y}$. А тому за означенням логарифма:

$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y.$$

5) Оскільки $x = a^{\log_a x}$, то $x^p = (a^{\log_a x})^p = a^{p\log_a x}$. За означенням логарифма:

$$\log_a x^p = p\log_a x. \ \blacksquare$$

Властивість $\log_a xy = \log_a x + \log_a y$ коротко формулюють так:

логарифм добутку дорівнює сумі логарифмів множників,

а властивість $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$ так:

логарифм частки дорівнює різниці логарифмів діленого і дільника.

Зауважимо, що властивість $\log_a x^p = p\log_a x$ у випадку, коли p – ціле парне число, тобто $p = 2m$, $m \in Z$ можна розглядати і для від'ємних значень x. Тоді

$$\log_a x^{2m} = 2m\log_a|x|, \text{ де } x \neq 0,\ m \in Z.$$

Розглянемо приклади використання властивостей логарифмів.

Приклад 2. $\log_7 1 = 0$, $\log_8 8 = 1$.

За допомогою властивостей логарифмів можна логарифмувати вирази, що містять операції множення, ділення, піднесення до степеня. **Прологарифмувати вираз** означає виразити його логарифм через логарифми додатних чисел і логарифми змінних, що входять до нього.

Задача 3. Прологарифмувати вираз $\frac{16a^5\sqrt[3]{b^7}}{\sqrt[8]{c}}$, де $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$, за основою 2.

Розв'язання. Використовуючи властивості логарифмів, маємо:

$$\log_2 \frac{16a^5\sqrt[3]{b^7}}{\sqrt[8]{c}} = \log_2 \frac{16a^5 b^{\frac{7}{3}}}{c^{\frac{1}{8}}} = \log_2\left(16a^5 b^{\frac{7}{3}}\right) - \log_2 c^{\frac{1}{8}} = \log_2 16 +$$

$$+\log_2 a^5 + \log_2 b^{\frac{7}{3}} - \log_2 c^{\frac{1}{8}} = 4 + 5\log_2 a + \frac{7}{3}\log_2 b - \frac{1}{8}\log_2 c.$$

Відповідь. $4 + 5\log_2 a + \frac{7}{3}\log_2 b - \frac{1}{8}\log_2 c$.

Формули логарифма добутку та частки можна використовувати й справа наліво для обчислення та спрощення виразів.

Задача 4. Обчислити:

1) $\log_{36}2 + \log_{36}18$; 2) $\log_3 18 - \log_3 2$.

Розв'язання. 1) $\log_{36}2 + \log_{36}18 = \log_{36}(2 \cdot 18) = \log_{36}36 = 1$;

2) $\log_3 18 - \log_3 2 = \log_3 \frac{18}{2} = \log_3 9 = 2$.

Відповідь. 1) 1; 2) 2.

Іноді доводиться шукати вираз за його логарифмом. Таку операцію називають *потенціюванням*.

Задача 5. Знайти x, якщо $\log_5 x = \log_5 64 + 2\log_5 7 - 3\log_5 8$.

Розв'язання. 1) Спочатку перетворимо праву частину:

$\log_5 64 + 2\log_5 7 - 3\log_5 8 = \log_5 64 + \log_5 7^2 - \log_5 8^3 =$

$= \log_5 \dfrac{64 \cdot 49}{64 \cdot 8} = \log_5 \dfrac{49}{8} = \log_5 6{,}125.$

2) Отже, $\log_5 x = \log_5 6{,}125$, а тому $x = 6{,}125$.

Відповідь. 6,125.

3. Формули переходу до іншої основи

Прологарифмуємо обидві частини основної логарифмічної тотожності $a^{\log_a b} = b$ за основою c, де $c > 0$, $c \neq 1$:

$$\log_c a^{\log_a b} = \log_c b.$$

Використовуючи властивість 5, маємо:

$$\log_a b \cdot \log_c a = \log_c b.$$

Звідси отримуємо *формулу переходу до іншої основи*:

$$\boldsymbol{\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}}.$$

Задача 6. Обчислити $\log_{32} 64$.

Розв'язання. Перейдемо до основи 2:

$$\log_{32} 64 = \frac{\log_2 64}{\log_2 32} = \frac{6}{5} = 1{,}2.$$

Відповідь. 1,2.

Розглянемо важливі наслідки формули переходу до іншої основи.

Якщо в цій формулі покласти $c = b$, то матимемо *формулу переходу від основи a до основи b*:

$$\boldsymbol{\log_a b = \frac{1}{\log_b a}}.$$

Задача 7. Обчислити $\log_{81} 3$.

Розв'язання. $\log_{81} 3 = \dfrac{1}{\log_3 81} = \dfrac{1}{4}$.

Відповідь. $\dfrac{1}{4}$.

Якщо у формулі переходу до іншої основи покласти замість a вираз a^q, то матимемо:

$$\log_{a^q} b = \frac{\log_c b}{\log_c a^q} = \frac{\log_c b}{q \cdot \log_c a} = \frac{1}{q} \cdot \frac{\log_c b}{\log_c a} = \frac{1}{q}\log_a b.$$

Отже,

$$\log_{a^q} b = \frac{1}{q}\log_a b.$$

Об'єднуючи цю властивість і властивість 5 основних властивостей логарифмів, матимемо:

$$\log_{a^q} x^p = \frac{p}{q}\log_a x, \text{ де } a > 0,\ a \neq 1,\ x > 0.$$

Задача 8. Обчислити $\log_{243}81$.

Розв'язання. $\log_{243}81 = \log_{3^5}3^4 = \frac{4}{5}\log_3 3 = \frac{4}{5}\cdot 1 = \frac{4}{5}$.

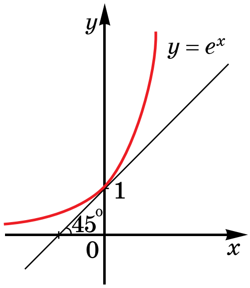
Відповідь. $\frac{4}{5}$.

Зауважимо, що, звичайно, цей приклад можна було розв'язати і за допомогою формули переходу до основи 3.

4. Десятковий і натуральний логарифми

Логарифм числа b за основою 10 називають *десятковим* і позначають $\lg b$.

У більшості калькуляторів і комп'ютерних програм десятковий логарифм позначають так: log (тобто логарифм без зазначення основи). Отже, щоб обчислити наближене значення $\log_2 7$ за допомогою калькулятора, використаємо формулу $\log_2 7 = \frac{\lg 7}{\lg 2}$, а далі обчислення $\log_2 7 \approx \frac{0{,}8450980}{0{,}3010299} \approx 2{,}8074$ (з точністю до десятитисячних).



Мал. 4.1

Розглядаючи різні графіки показникової функції $y = a^x$, можна помітити, що всі вони проходять через точку (0; 1). Існує таке число, яке позначають літерою e, що дотична, проведена до графіка функції $y = e^x$ у точці (0; 1), утворює з додатним напрямом осі абсцис кут 45° (мал. 4.1).

Кутовий коефіцієнт дотичної, очевидно, дорівнює tg45°, тобто $k = 1$.

Число e відіграє значну роль у математичному аналізі, а функцію $y = e^x$ називають ще *експонентою*.

Число e – ірраціональне, $e \approx 2{,}7182818284...$

Логарифм числа b за основою e називають *натуральним* і позначають $\ln b$.

У більшості калькуляторів і комп'ютерних програм є натуральний логарифм, позначення якого збігається з нашим позначенням.

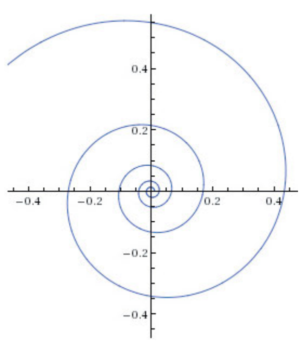
5. Застосовування логарифмів для опису реальних процесів

Логарифми використовують для опису реальних процесів у фізиці, хімії, астрономії. Так, наприклад, відомий вчений К. Ціолковський (1857–1935) вивів формулу для розрахунку абсолютної (характеристичної) швидкості ракети, яка містить логарифм. Під час будівництва ставків потрібно враховувати кількість води, що прибуватиме у ставок під час повені; розрахунки проводять за допомогою логарифмів.

Двійковий логарифм числа (тобто логарифм за основою 2) широко використовується в теорії інформації. Так, наприклад, він дає змогу визначити число цифр у внутрішньому комп'ютерному поданні числа; на двійкових логарифмах засновано інформаційну ентропію (міра кількості інформації) тощо. У теорії музики, щоб визначити, на скільки частин ділити октаву, потрібно відшукати раціональне наближення для числа $\log_2 1{,}5 \approx 0{,}585$, що дає змогу після додаткових обчислень обґрунтувати класичний розподіл октав на 12 півтонів.

Десяткові логарифми та логарифмічна шкала, що основана на цих логарифмах, використовуються в багатьох областях науки, наприклад: у фізиці (для вимірювання інтенсивності звуку в децибелах), астрономії (шкала яскравості зірок), хімії (активність водневих іонів), сейсмології (шкала Ріхтера), теорії музики (нотна шкала відносно частоти нотних звуків), історії (логарифмічна шкала часу) тощо.

У природі часто трапляється особливий вид спіралі – логарифмічна спіраль (мал. 4.2). Логарифмічна спіраль була вперше описана Р. Декартом і пізніше ґрунтовно досліджена Я. Бер-



Мал. 4.2

Мал. 4.3

нуллі. Розмір витків логарифмічної спіралі поступово збільшується, але їх форма залишається незмінною. Можливо, унаслідок цієї властивості логарифмічна спіраль описує багато природних процесів зростання чи спадання, розміщення квіток соняшників, подібних до мушель малюсків (мал. 4.3) тощо.

6. Експонента в описі реальних процесів

Як зазначено вище в цьому параграфі, функцію $y = e^x$ називають експонентою; інші функції з основою e називають також експотенціальними. Ці функції відіграють значну роль у побуті та науці. Розглянемо кілька прикладів.

Мабуть, ви помітили, що коли зняти киплячий чайник з вогню, то спочатку він швидко остигає, а потім остигання йде набагато повільніше. Це відбувається тому, що швидкість охолодження пропорційна різниці між температурою чайника і температурою навколишнього середовища. Якщо спочатку температура чайника дорівнювала T_0, а температура повітря – T_1, то через t секунд температура T чайника виражається формулою $T = (T_1 - T_0)e^{-kt+T_1}$, де k – число, що залежить від форми чайника, його матеріалу тощо.

Зміну кількості населення в населеному пункті протягом незначного інтервалу часу можна подати за допомогою формули $N = N_0e^{kt}$, де N_0 – число людей при $t = 0$, N – число людей на момент часу t, k – деяка постійна.

Радимо знайти в літературі та Інтернеті інші цікаві застосування логарифмів та експоненти.

А ще раніше...

Протягом XVI ст. значно зріс обсяг робіт, які пов'язані з наближеними обчисленнями під час розв'язування прикладних задач (особливо в астрономії). Найбільші труднощі виникали при діленні та множенні великих чисел.

Саме в цей час було винайдено логарифми, які давали змогу зводити множення і ділення чисел до, відповідно, додавання і віднімання логарифмів. Широкого застосування логарифми отримали після того, як незалежно один від одного склали таблиці логарифмів два математики Дж. Непер і І. Бюргі.

Шотландський математик Дж. Непер у книжках, виданих у 1614 і 1619 рр., склав таблиці логарифмів синусів, косинусів і тангенсів кутів від 0° до 90° з кроком в 1 мінуту, що було дуже цінним для астрономів. Швейцарський математик І. Бюргі свої таблиці готував, швидше за все, ще до 1610 р., але вийшли вони лише в 1620 р., а тому не набули популярності.

Перші таблиці десяткових логарифмів у 1617 р. видав англійський математик Г. Брігс (1561–1630), а натуральних логарифмів – у 1619 р. інший англійський математик Дж. Спейдель (1607–1647).

Дж. Непер
(1550–1617)

І. Бюргі
(1552–1632)

Л. Ейлер
(1707–1783)

Сучасне означення логарифма дав видатний математик, фізик, механік і астроном Л. Ейлер. Він також увів поняття основи логарифма, позначення log *і e.*

У 1623 р. англійський математик Е. Гунтер (1581–1626) винайшов шкалу, на якій ґрунтується логарифмічна лінійка, яку потім неодноразово удосконалювали і яка до 70-х років XX ст. була обчислювальним засобом для представників багатьох спеціальностей. Тільки після поширення калькуляторів та інших сучасних засобів обчислення логарифмічні таблиці та лінійки перестали бути засобами обчислення та посіли свої законні місця в музеях математики.

● Що називають логарифмом числа *b* за основою *a*? ● При яких *a* і *b* має зміст вираз $\log_a b$? ● Запишіть основну логарифмічну тотожність. ● Сформулюйте й доведіть основні властивості логарифмів. ● Запишіть формулу переходу до іншої основи та наслідки з неї. ● Що називають десятковим логарифмом, а що – натуральним логарифмом?

Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

1

4.1. (*Усно.*) Які з виразів мають зміст:

1) $\log_2(-1)$; 2) $\lg 8$; 3) $\log_7 0$; 4) $\ln 1{,}5$?

Чи правильна рівність (4.2–4.3):

4.2. 1) $\log_7 1 = 0$; 2) $\log_2 4 = 2$; 3) $\log_2 8 = 3$;

4) $\log_3 \dfrac{1}{9} = -2$; 5) $\log_5 0{,}2 = -1$; 6) $\lg 0{,}01 = -2$;

7) $\log_{\sqrt{2}} 4 = 4$; 8) $\log_{\sqrt{3}} \dfrac{1}{27} = -6$?

4.3. 1) $\log_8 8 = 1$; 2) $\log_3 9 = 2$; 3) $\log_2 32 = 5$;

4) $\log_5 \dfrac{1}{5} = -1$; 5) $\log_9 \dfrac{1}{81} = -2$; 6) $\log_{\sqrt{2}} 8 = 6$;

7) $\lg 0{,}1 = -1$; 8) $\log_{\sqrt{5}} \dfrac{1}{5} = -2$?

Знайдіть **(4.4–4.5)**:

4.4. 1) $\log_9 9$; 2) $\log_2 16$; 3) $\log_{17} 1$; 4) $\log_7 49$.

4.5. 1) $\log_5 1$; 2) $\log_3 27$; 3) $\log_7 7$; 4) $\log_5 25$.

Обчисліть **(4.6–4.7)**:

4.6. 1) $3^{\log_3 7}$; 2) $0{,}8^{\log_{0,8} 3}$.

4.7. 1) $0{,}9^{\log_{0,9} 0,5}$; 2) $5^{\log_5 8}$.

2 Знайдіть **(4.8–4.9)**:

4.8. 1) $\log_9 \frac{1}{9}$; 2) $\log_2 \frac{1}{16}$; 3) $\log_3 \frac{1}{81}$; 4) $\lg 0{,}001$;

5) $\log_{13} \sqrt{13}$; 6) $\log_{\frac{1}{2}} 4$; 7) $\log_{\sqrt{3}} 81$; 8) $\lg 10\sqrt{10}$.

4.9. 1) $\log_7 \frac{1}{7}$; 2) $\log_3 \frac{1}{27}$; 3) $\log_5 \frac{1}{25}$; 4) $\lg 0{,}0001$;

5) $\log_{\sqrt{5}} 5$; 6) $\log_{\frac{1}{5}} 25$; 7) $\log_{17} \sqrt{17}$; 8) $\lg 100\sqrt{10}$.

Знайдіть значення виразу, якщо $a > 0$, $a \neq 1$ **(4.10–4.11)**:

4.10. 1) $\log_a a^8$; 2) $\log_a \sqrt{a}$; 3) $\log_a \frac{1}{a}$; 4) $\log_a \frac{1}{a^4}$.

4.11. 1) $\log_a a^5$; 2) $\log_a \sqrt[3]{a}$; 3) $\log_a \sqrt{a^5}$; 4) $\log_a \frac{1}{a^3}$.

Знайдіть логарифми наведених чисел за основою a **(4.12–4.13)**:

4.12. 1) 64; $\frac{1}{8}$; $\sqrt[3]{2}$; $\sqrt[5]{2}$, якщо $a = 2$;

2) 125; $\frac{1}{25}$; $\sqrt{5}$; $\sqrt[3]{25}$, якщо $a = 5$.

4.13. 1) 9; $\frac{1}{243}$; $\sqrt{3}$; $\sqrt[5]{9}$, якщо $a = 3$;

2) 64; 2; $\frac{1}{16}$; $\sqrt[7]{4}$, якщо $a = 4$.

Розв'яжіть рівняння **(4.14–4.15)**:

4.14. 1) $2^x = 7$; 2) $7^{x+1} = 9$.

4.15. 1) $3^x = 5$; 2) $11^{x-1} = 8$.

Обчисліть **(4.16–4.17)**:

4.16. 1) $\frac{1}{2}\log_5 25 - \frac{1}{4}\log_2 128$; 2) $2\log_2 \frac{1}{4} + 4\log_{\frac{1}{3}} 27$.

4.17. 1) $\frac{1}{4}\log_6 36 + \frac{1}{2}\log_3 81$; 2) $4\log_3 \frac{1}{9} - 2\log_{\frac{1}{2}} 16$.

Знайдіть значення виразу (**4.18–4.19**):

4.18. 1) $2^{3\log_2 5}$; 2) $3^{\frac{1}{2}\log_3 4}$; 3) $5^{1+\log_5 7}$; 4) $7^{\log_7 3-1}$.

4.19. 1) $17^{2\log_{17} 3}$; 2) $4^{\frac{1}{2}\log_4 25}$; 3) $9^{1+\log_9 2}$; 4) $15^{\log_{15} 2-1}$.

Обчисліть (**4.20–4.21**):

4.20. 1) $\log_6 3+\log_6 2$; 2) $\log_{\frac{1}{2}} 32-\log_{\frac{1}{2}} 16$;

3) $\log_5 \sqrt{10}-\log_5 \sqrt{2}$; 4) $\lg 4+\lg 25$.

4.21. 1) $\log_{21} 3+\log_{21} 7$; 2) $\log_{\frac{1}{3}} 45-\log_{\frac{1}{3}} 15$;

3) $\lg \sqrt{30}-\lg \sqrt{3}$; 4) $\log_6 4+\log_6 9$.

Знайдіть значення виразу (**4.22–4.23**):

4.22. 1) $\log_2 \sqrt[3]{2^4}$; 2) $\log_9 \sqrt{9^5}$; 3) $\dfrac{\lg 8}{\lg 2}$; 4) $\dfrac{\log_7 81}{\log_7 3}$.

4.23. 1) $\log_3 \sqrt[5]{3^7}$; 2) $\log_8 \sqrt{8^7}$; 3) $\dfrac{\log_5 16}{\log_5 2}$; 4) $\dfrac{\lg 27}{\lg 3}$.

Прологарифмуйте вираз ($a>0$, $b>0$, $c>0$) (**4.24–4.25**):

4.24. 1) $8a^2b^7\sqrt{c}$ за основою 2; 2) $\dfrac{1}{7}a\sqrt[3]{b}c^5$ за основою 7.

4.25. 1) $81\sqrt[5]{a}bc^7$ за основою 3; 2) $\dfrac{1}{5}a^7\sqrt[4]{bc}$ за основою 5.

Знайдіть x з умови (**4.26–4.27**):

4.26. 1) $\lg x=\lg 4-\lg 2+\lg 3$; 2) $\log_4 24+\log_4 5-\log_4 6=\log_4 x$.

4.27. 1) $\log_5 x=\log_5 34-\log_5 2+\log_5 4$;

2) $\lg 8-\lg 4+\lg 5=\lg x$.

4.28. Дано: $\lg x=a$, $\lg y=b$. Виразіть через a і b десяткові логарифми чисел:

1) xy; 2) $\dfrac{x}{y}$; 3) y^3;

4) $x^{\frac{1}{4}}$; 5) x^3y^2; 6) $\sqrt[3]{xy}$.

3 **4.29.** Відомо, що $\lg 2\approx 0{,}301$. Знайдіть:

1) $\lg 20$; 2) $\lg 2000$; 3) $\lg 0{,}2$; 4) $\lg 0{,}02$.

4.30. Відомо, що $\lg 5\approx 0{,}699$. Знайдіть:

1) $\lg 50$; 2) $\lg 500$; 3) $\lg 0{,}5$; 4) $\lg 0{,}005$.

Обчисліть (**4.31–4.34**):

4.31. 1) $\log_2(4\log_6 36)$; 2) $\log_{12}\left(3\log_{\sqrt{5}} 25\right)$;

3) $\log_{1,5}\log_4 8$; 4) $\lg(5\log_7 49)^2$.

4.32. 1) $\log_3(3\log_5 125)$; 2) $\log_{0,5}\log_5\sqrt{5}$;
3) $\log_{0,75}\log_8 16$; 4) $\lg(2\lg 10^5)^3$.

4.33. 1) $\log_{13}\frac{1}{\sqrt[5]{13^2}}$; 2) $\log_{27}\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}$;
3) $\log_{\sqrt{8}}(16\sqrt{2})$; 4) $\log_{32}\sqrt[3]{2}$.

4.34. 1) $\log_2\frac{1}{\sqrt[7]{2^{13}}}$; 2) $\log_{16}\cos\frac{\pi}{3}$;
3) $\log_{\sqrt{5}}(125\sqrt{5})$; 4) $\log_9\sqrt[5]{3}$.

4.35. Прологарифмуйте вираз за основою 2 ($a > 0$, $b > 0$, $c > 0$):
1) $\frac{\sqrt[5]{16a^3}\sqrt[7]{b}}{\sqrt[5]{c^2}}$; 2) $\sqrt[6]{\frac{ab^7}{32c^5}}$.

4.36. Прологарифмуйте вираз за основою 3 ($a > 0$, $b > 0$, $c > 0$):
1) $\frac{\sqrt[4]{27b^7}\sqrt[5]{c}}{\sqrt[9]{a^5}}$; 2) $\sqrt[5]{\frac{ac^4}{9b^3}}$.

Обчисліть (**4.37–4.40**):

4.37. 1) $\frac{\ln 27+\ln 12}{\ln 2+2\ln 3}$; 2) $\frac{\log_8 27-2\log_8 3}{\log_8 45+\log_8 0,2}$.

4.38. 1) $\frac{\log_{12}81+\log_{12}64}{2\log_{12}3+3\log_{12}2}$; 2) $\frac{2\ln 4+\ln 0,5}{\ln 6-\ln 12}$.

4.39. 1) $\left(\frac{1}{8}\right)^{\frac{1}{4}\log_{\frac{1}{8}}81}$; 2) $9^{1-\log_3 5}$;
3) $2^{\log_4 25+\log_{16}625}$; 4) $100^{\lg\frac{1}{3}-\lg 2}$.

4.40. 1) $\left(\frac{1}{7}\right)^{\frac{1}{3}\log_{\frac{1}{7}}8}$; 2) $4^{2-\log_2 6}$; 3) $3^{\log_9 16-\log_{27}8}$; 4) $1000^{\lg 2-\lg 4}$.

Знайдіть x, якщо (**4.41–4.42**):

4.41. 1) $\log_{0,6}x = 5\log_{0,6}3-\frac{1}{3}\log_{0,6}27-3\log_{0,6}6$;
2) $\log_2 x = \log_4 8+2\log_4 5-\log_4 2$.

4.42. 1) $\log_{18}x = 2\log_{18}6-2\log_{18}4+3\log_{18}\sqrt[3]{20}$;
2) $\lg x = \log_{100}32+2\log_{100}3-\log_{100}2$.

4.43. Відомо, що $\log_3 2 = m$, $\log_3 7 = n$. Виразіть через m і n:
1) $\log_3 14$; 2) $\log_3 6$;
3) $\log_3 28$; 4) $\log_2 7$.

4.44. Відомо, що $\log_2 3 = x$, $\log_2 5 = y$. Виразіть через x і y:
1) $\log_2 15$; 2) $\log_2 6$;
3) $\log_2 75$; 4) $\log_3 5$.

Розв'яжіть рівняння (**4.45–4.46**):

4.45. 1) $4^x - 4 \cdot 2^x - 5 = 0$; 2) $25^x - 5^{x+1} + 4 = 0$.

4.46. 1) $9^x - 3^x - 2 = 0$; 2) $4^x - 2^{x+2} + 3 = 0$.

4.47. Доведіть формулу $a^{\log_c b} = b^{\log_c a}$.

Порівняйте (**4.48–4.49**):

4.48. 1) $7^{\log_8 9}$ і $9^{\log_8 7}$; 2) $2^{\lg 3}$ і $3^{\lg 2} + 0{,}1$.

4.49. 1) $5^{\lg 2}$ і $2^{\lg 5}$; 2) $4^{\log_3 7} - 0{,}1$ і $7^{\log_3 4}$.

Обчисліть (**4.50–4.51**):

4.50. 1) $2^{5-8\log_{16} 3}$; 2) $\log_4 3 \cdot \lg 4 \cdot \log_{27} 10$.

4.51. 1) $3^{4-6\log_{27} 2}$; 2) $\log_6 25 \cdot \lg 6 \cdot \log_5 10$.

Знайдіть значення виразу (**4.52–4.53**):

4.52. 1) $\ln \operatorname{tg} 16° + \ln \operatorname{tg} 74°$; 2) $\log_2 \operatorname{ctg}\frac{\pi}{12} + \log_2\left(2\sin^2\frac{\pi}{12}\right)$.

4.53. 1) $\lg \operatorname{tg} 89° + \lg \operatorname{tg} 1°$; 2) $\log_2 \cos\frac{\pi}{8} + \log_2\left(2\sin\frac{\pi}{8}\right)$.

Обчисліть (**4.54–4.55**):

4.54. 1) $5^{\frac{1}{\log_7 5}}$; 2) $2^{\frac{3}{\log_5 2}}$; 3) $3^{-\frac{1}{\log_7 3}}$; 4) $3^{\frac{1}{2\log_{25} 3}}$.

4.55. 1) $2^{\frac{1}{\log_3 2}}$; 2) $3^{\frac{2}{\log_7 3}}$; 3) $5^{-\frac{1}{\log_4 5}}$; 4) $5^{\frac{1}{3\log_8 5}}$.

4.56. Розв'яжіть рівняння $x^2 + 3^{\log_3 x} = 6$.

4.57. Розв'яжіть рівняння $x^2 - 5^{\log_5 x} - 12 = 0$.

4.58. Обчисліть $\lg^2 2 + \lg 5 \cdot \lg 20$.

Життєва математика

4.59. Відомо, що доросла людина, яка викурює 1 цигарку на день, укорочує свій вік на 10 хв, підліток – на 12 хв. На скільки вкоротить свій вік за місяць підліток, якщо викурюватиме 2 цигарки на день?

4.60. Заробітна плата Олени пропорційна до кількості відпрацьованих годин. За місяць вона відпрацювала 170 годин та отримала 4590 грн. Скільки годин треба відпрацювати Олені в наступний місяць, якщо вона хоче отримати 4860 грн?

Перевірте свою компетентність!

Завдання № 4

1. Знайдіть множину значень функції $y = 3^{-|x|}$.

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty; +1]$	$(0; 1)$	$(0; 1]$	$(0; +\infty)$	$[1; +\infty)$

2. Укажіть проміжок, якому належить корінь рівняння $2^x = \frac{1}{16}$.

А	Б	В	Г	Д
$(-5; -4)$	$[4; +\infty)$	$[-3; 3]$	$[-4; 0]$	$(-\infty; -5]$

3. Скоротіть дріб $\frac{\sin 4\alpha}{2\cos 2\alpha}$.

А	Б	В	Г	Д
$\sin 2\alpha$	$\cos 2\alpha$	$\sin\alpha$	$\frac{1}{2}\sin 2\alpha$	$\frac{1}{2}\cos 2\alpha$

4. Знайдіть найменший корінь рівняння $x|x| - 3x = 0$.

А	Б	В	Г	Д
3	0	−3	−1,5	інша відповідь

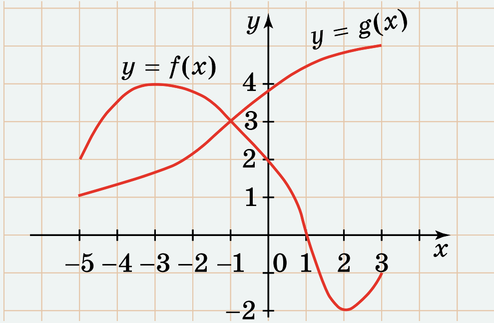
5. Укажіть, скільки можна скласти різних двоцифрових чисел із цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, причому цифри в числі не повторюються.

А	Б	В	Г	Д
24	25	26	28	30

6. Укажіть точку мінімуму функції $y = 3x^2 - x^3$.

А	Б	В	Г	Д
−1	0	1	2	функція не має точки мінімуму

7. На малюнку зображено графіки функцій $y = f(x)$ і $y = g(x)$, визначених на проміжку $[-5; 3]$. Установіть відповідність між аргументом x_0 (1–4) та значенням функції $y = f(x_0)$ (А–Д).



	А	Б	В	Г	Д
1					
2					
3					
4					

Аргумент

1 x_0 – абсциса точки перетину графіка функції $y = f(x)$ з віссю Oy

2 x_0 – точка мінімуму функції $y = f(x)$

3 x_0 – точка максимуму функції $y = f(x)$

4 x_0 – абсциса точки перетину графіків функцій $y = f(x)$ і $y = g(x)$

Значення функції

А -2

Б 0

В 2

Г 3

Д 4

8. Робітник, працюючи самостійно, може виконати деяку роботу за 20 год, а робітниця – за 30 год. За скільки годин вони виконають роботу, якщо будуть працювати разом?

9. Знайдіть перший член геометричної прогресії b_n, якщо $b_2 = 8$, $b_5 = -64$.

§ 5. ЛОГАРИФМІЧНА ФУНКЦІЯ, ЇЇ ВЛАСТИВОСТІ ТА ГРАФІК

1. Логарифмічна функція та її графік

Функцію, задану формулою $y = \log_a x$ ($a > 0$, $a \neq 1$), називають *логарифмічною функцією*.

Приклади логарифмічних функцій:

$$y = \log_5 x,\ y = \log_{\frac{1}{2}} x,\ y = \log_\pi x,\ y = \log_{\sqrt{7}} x \text{ тощо.}$$

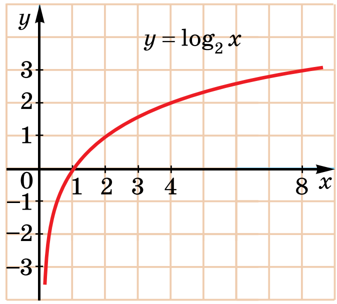
При $a > 0$, $a \neq 1$ вираз $\log_a x$ має зміст лише для додатних значень x. Тому

***областю визначення функції $y = \log_a x$ є проміжок* $(0; +\infty)$.**

Як і для показникової функції, розглянемо приклади логарифмічних функцій і побудуємо графіки цих функцій за точками.

Приклад 1. Розглянемо функцію $y = \log_2 x$. Складемо таблицю значень функції для декількох значень аргументу $x > 0$.

x	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8
y	–3	–2	–1	0	1	2	3



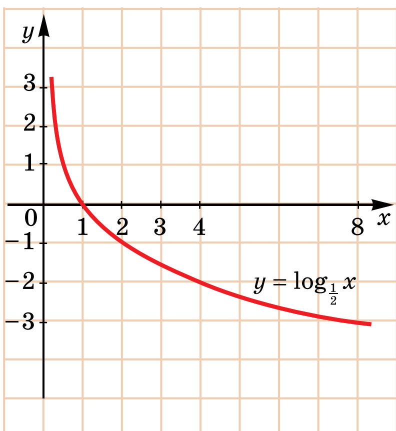
Мал. 5.1

Побудуємо графік функції $y = \log_2 x$ за точками (мал. 5.1). Оскільки $x > 0$, то графік не перетинає вісь ординат, але при $x \to 0$ графік наближається до осі ординат, тобто вісь y – асимптота цього графіка.

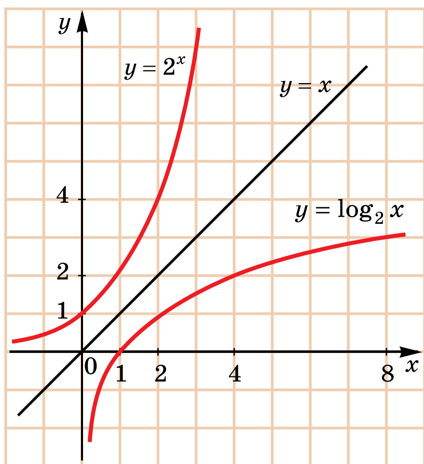
Приклад 2. Розглянемо функцію $y = \log_{\frac{1}{2}} x$. Складемо таблицю значень.

x	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8
y	3	2	1	0	–1	–2	–3

Графік функції $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ зображено на малюнку 5.2.



Мал. 5.2



Мал. 5.3

Якщо на одному малюнку зобразити графіки функцій $y = 2^x$ і $y = \log_2 x$ (мал. 5.3), то можна помітити, що вони симетричні відносно прямої $y = x$.

Це можна пояснити тим, що рівності $y = 2^x$ і $x = \log_2 y$ задають одну й ту саму залежність між змінними x і y. Щоб від рівності

$x = \log_2 y$ перейти до рівності $y = \log_2 x$, треба поміняти місцями змінні x та y, а на графіку – осі x і y. Цим і пояснюється симетрія графіків функцій $y = 2^x$ та $y = \log_2 x$ відносно прямої $y = x$.

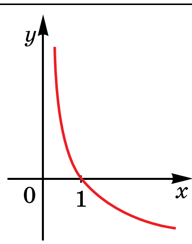
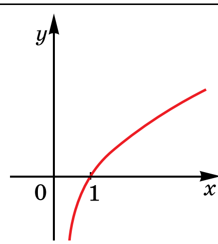
Можна зробити загальний висновок про те, що

> ***!*** *графіки показникової функції $y = a^x$ і логарифмічної функції $y = \log_a x$, що мають однакові основи a, симетричні відносно прямої $y = x$.*

2. Властивості логарифмічної функції

Використовуючи висновок про симетрію графіків функцій $y = a^x$ та $y = \log_a x$ відносно осі $y = x$ та отримані знання про графіки показникової функції, можна сказати, що графіки всіх функцій виду $y = \log_a x$, де $a > 1$, схематично виглядають так само, як графік функції $y = \log_2 x$ (мал. 5.1), а якщо $0 < a < 1$, – то так само, як графік функції $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ (мал. 5.2).

Систематизуємо властивості логарифмічної функції $y = \log_a x$ при $0 < a < 1$ та при $a > 1$ у вигляді таблиці.

№	Властивість	$0 < a < 1$	$a > 1$
1	Область визначення	$(0; +\infty)$	$(0; +\infty)$
2	Множина значень	$y \in R$	$y \in R$
3	Парність, непарність	Ні парна, ні непарна	Ні парна, ні непарна
4	Періодичність	Неперіодична	Неперіодична
5	Нулі функції	$y = 0$ при $x = 1$	$y = 0$ при $x = 1$
6	Проміжки знакосталості	$y > 0$ при $x \in (0; 1)$; $y < 0$ при $x \in (1; +\infty)$	$y > 0$ при $x \in (1; +\infty)$; $y < 0$ при $x \in (0; 1)$
7	Проміжки монотонності	Спадає на $(0; +\infty)$	Зростає на $(0; +\infty)$
8	Екстремуми	Немає	Немає
9	Асимптота	$x = 0$	$x = 0$
10	Графік функції проходить через точку $(1; 0)$		

Розглянемо приклади використання властивостей логарифмічної функції.

Задача 1. Порівняти значення виразів:

1) $\log_3 2{,}7$ і $\log_3 2{,}9$; 2) $\log_{0,3}\frac{1}{8}$ і $\log_{0,3}\frac{1}{2}$.

Розв'язання. 1) Функція $y = \log_3 x$ зростає на $(0; +\infty)$, тому більшому значенню аргументу відповідає більше значення функції. Оскільки $2{,}7 < 2{,}9$, то $\log_3 2{,}7 < \log_3 2{,}9$.
2) Функція $y = \log_{0,3} x$ спадає на $(0; +\infty)$, тому більшому значенню аргументу відповідає менше значення функції. Оскільки $\frac{1}{8} < \frac{1}{2}$, то $\log_{0,3}\frac{1}{8} > \log_{0,3}\frac{1}{2}$.

Відповідь. 1) $\log_3 2{,}7 < \log_3 2{,}9$; 2) $\log_{0,3}\frac{1}{8} > \log_{0,3}\frac{1}{2}$.

Задача 2. Порівняти a ($a > 0$, $a \neq 1$) з одиницею, якщо:

1) $\log_a 5 < \log_a 4{,}5$; 2) $\log_a 3{,}8 > \log_a 3$.

Розв'язання. 1) Оскільки $\log_a 5 < \log_a 4{,}5$, а $5 > 4{,}5$, то меншому значенню аргументу відповідає більше значення функції. Тому функція $y = \log_a x$ спадає, а отже, $0 < a < 1$.
2) $\log_a 3{,}8 > \log_a 3$ і $3{,}8 > 3$. Більшому значенню аргументу відповідає більше значення функції. Функція $y = \log_a x$ зростає, тому $a > 1$.

Відповідь. 1) $0 < a < 1$; 2) $a > 1$.

Задача 3. Знайти область визначення функції:

1) $y = \log_3(2x - x^2)$; 2) $y = \log_x(4 - x)$.

Розв'язання. 1) Область визначення знаходимо з умови $2x - x^2 > 0$. Розв'язавши цю нерівність, отримаємо $x \in (0; 2)$.
2) Область визначення знайдемо із системи:

$$\begin{cases} x > 0, \\ x \neq 1, \\ 4 - x > 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x > 0, \\ x \neq 1, \\ x < 4; \end{cases} \quad x \in (0; 1) \cup (1; 4).$$

Відповідь. 1) $(0; 2)$; 2) $(0; 1) \cup (1; 4)$.

Аналізуючи графіки логарифмічної функції при $a > 1$ і $0 < a < 1$ та властивості, зібрані в таблиці, можна прийти до висновку, що

! $\log_a b > 0$, *якщо* a *і* b *розташовані по один бік від* 1, *тобто* $a > 1$, $b > 1$ *або* $0 < a < 1$, $0 < b < 1$;
$\log_a b < 0$, *якщо* a *і* b *розташовані по різні боки від* 1, *тобто* $0 < a < 1$, $b > 1$ *або* $a > 1$, $0 < b < 1$.

Використовуючи це правило, можна порівнювати логарифми з нулем та між собою.

Приклад 3. $\log_{\frac{1}{7}} 5 < 0$ (оскільки $5 > 1$, $\frac{1}{7} < 1$);

$\log_2 3 > 0$ (оскільки $3 > 1$, $2 > 1$).

Приклад 4. $\log_{\frac{1}{3}} 2 < \log_7 1{,}1$ (оскільки $\log_{\frac{1}{3}} 2 < 0$, $\log_7 1{,}1 > 0$).

3. Застосування логарифмічної функції для опису реальних процесів

Логарифмічну функцію широко застосовують для опису реальних процесів. Так, наприклад, логарифмічна функція моделює процеси швидкого зростання або затухання, тривалості хімічної реакції, а також, наприклад, закони зміни роботи газу, зміни сили відчуття від сили збудження (психофізичний закон Вебера), зміни тиску від зміни висоти тощо.

Логарифми використовуються також у банківській справі. Якщо, наприклад, вкладник поклав у банк на депозит певну суму грошей під 12 % річних і хоче дізнатися, через скільки років сума подвоїться, то для розв'язування цієї задачі, використовуючи формулу складних відсотків, матимемо:

$$2A_0 = A_0\left(1 + \frac{12}{100}\right)^n, \text{ тобто } 2 = 1{,}12^n,\ n = \log_{1{,}12} 2 = \frac{\lg 2}{\lg 1{,}12} \approx 6{,}11.$$

Таким чином, щоб вклад подвоївся, він має перебувати в банку трішки більше 6 років.

Радимо знайти в літературі та Інтернеті інші цікаві застосування логарифмічної функції та підготувати презентацію для виступу перед класом.

● Яку функцію називають логарифмічною? ● Якою є область визначення логарифмічної функції? ● Як розташовані графіки функцій $y = a^x$ і $y = \log_a x$? ● Укажіть властивості логарифмічної функції при $0 < a < 1$ і при $a > 1$. ● За допомогою якого правила $\log_a b$ можна порівняти з нулем?

Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

5.1. (*Усно.*) Які з наведених функцій є зростаючими, а які – спадними на $(0; +\infty)$:

1) $y = \log_{0,7} x$; 2) $y = \log_{8,5} x$; 3) $y = \log_{\frac{1}{3}} x$; 4) $y = \log_{\frac{7}{6}} x$?

5.2. Які з наведених функцій є спадними, а які – зростаючими на $(0; +\infty)$:

1) $y = \log_{6,2} x$; 2) $y = \log_{\frac{1}{5}} x$; 3) $y = \log_{0,01} x$; 4) $y = \log_{\frac{13}{6}} x$?

5.3. Порівняйте x і y, якщо:

1) $\log_5 x > \log_5 y$; 2) $\log_{0,17} x > \log_{0,17} y$.

5.4. Порівняйте m і n, якщо:

1) $\log_{0,3} m < \log_{0,3} n$; 2) $\log_7 m < \log_7 n$.

2 Порівняйте числа (**5.5–5.6**):

5.5. 1) $\log_{0,2} 3$ і $\log_{0,2} 4$; 2) $\log_{15} 17$ і $\log_{15} 18$.

5.6. 1) $\log_3 4$ і $\log_3 5$; 2) $\log_{0,8} 2$ і $\log_{0,8} 3$.

Побудуйте схематично графік функції та вкажіть її властивості (**5.7–5.8**):

5.7. 1) $y = \log_3 x$; 2) $y = \log_{\frac{1}{5}} x$.

5.8. 1) $y = \log_{0,6} x$; 2) $y = \log_{2,7} x$.

Зростаючою чи спадною на $(0; +\infty)$ є функція (**5.9–5.10**):

5.9. 1) $y = \log_{\operatorname{tg} 43^\circ} x$; 2) $y = \log_{2\sin\frac{\pi}{3}} x$?

5.10. 1) $y = \log_{\frac{1}{\sin 60^\circ}} x$; 2) $y = \log_{\cos\frac{\pi}{3}} x$?

Знайдіть область визначення функції (**5.11–5.12**):

5.11. 1) $y = \log_7(2x - 1)$; 2) $y = \log_{0,1}(3x - x^2)$.

5.12. 1) $y = \log_5(2 - 3x)$; 2) $y = \log_{0,2}(x^2 - 5x)$.

Порівняйте з одиницею основу логарифма a $(a > 0)$, якщо (**5.13–5.14**):

5.13. 1) $\log_a 5 < \log_a 10$; 2) $\log_a 2,3 > \log_a 4$.

5.14. 1) $\log_a 7 > \log_a 8$; 2) $\log_a 15 < \log_a 20$.

5.15. Які з точок належать графіку функції $y = \log_{\frac{1}{4}} x$:

1) $A\left(\frac{1}{4}; 0\right)$; 2) $B\left(\frac{1}{16}; 2\right)$; 3) $C(4; -1)$; 4) $D(16; 2)$?

5.16. Які з точок належать графіку функції $y = \log_3 x$:

1) $A(9; -2)$; 2) $B(1; 0)$; 3) $C\left(\frac{1}{9}; 2\right)$; 4) $D\left(\frac{1}{27}; -3\right)$?

5.17. Побудуйте графік функції $y = \log_{\frac{1}{2}} x$. Як змінюється y, якщо x зростає від 1 до 8?

5.18. Побудуйте графік функції $y = \log_3 x$. Як змінюється y, якщо x зростає від 1 до 9?

Порівняйте число з нулем (**5.19–5.20**):

5.19. 1) $\log_5 7$; 2) $\log_{\frac{1}{3}} 2$; 3) $\log_{\frac{1}{5}} \frac{1}{7}$; 4) $\log_{17} \frac{1}{2}$.

5.20. 1) $\log_7 \frac{1}{2}$; 2) $\log_{\frac{1}{8}} \frac{1}{9}$; 3) $\log_{\frac{1}{3}} 19$; 4) $\log_{19}18$.

Порівняйте з одиницею число a (5.21–5.22):

5.21. 1) $\log_a 7 = 2{,}19$; 2) $\log_a 0{,}9 = -2{,}7$;
3) $\log_a 5 = -3{,}1$; 4) $\log_a 0{,}17 = 2{,}5$.

5.22. 1) $\log_a 5 = -12$; 2) $\log_a 0{,}8 = 7$;
3) $\log_a 13 = 2{,}7$; 4) $\log_a 0{,}19 = -2{,}7$.

5.23. Побудуйте графік функції $y = \log_2(x - 1)$ та запишіть її властивості.

5.24. Побудуйте графік функції $y = \log_3(x - 2)$ та запишіть її властивості.

5.25. Побудуйте графік функції $y = \log_{\frac{1}{3}} x + 1$ та запишіть її властивості.

5.26. Побудуйте графік функції $y = \log_{\frac{1}{2}} x + 2$ та запишіть її властивості.

5.27. Знайдіть найменше і найбільше значення функції $y = \log_{\frac{1}{4}} x$, якщо $x \in \left[\frac{1}{4}; 16\right]$.

5.28. Знайдіть найменше і найбільше значення функції $y = \log_{\frac{1}{3}} x$, якщо $x \in \left[\frac{1}{9}; 3\right]$.

Порівняйте числа **(5.29–5.30)**:

5.29. 1) $\log_3 4$ і 1; 2) $\log_\pi 3$ і 1;
3) 2 і $\log_3 8{,}5$; 4) $\log_2 3$ і $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{6}$.

5.30. 1) $\log_8 7$ і 1; 2) $\log_\pi 3{,}5$ і 1;
3) 2 і $\log_3 10$; 4) $\log_2 5$ і $\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{7}$.

Знайдіть область визначення функції **(5.31–5.32)**:

5.31. $y = \log_{0,1}(3 - x) + \sqrt{x - 2}$.

5.32. $y = \log_5(x - 2) + \sqrt{4 - x}$.

Побудуйте графік функції **(5.33–5.34)**

5.33. $y = 1 + \log_{\frac{1}{2}}(x + 2)$.

5.34. $y = 3 + \log_{\frac{1}{4}}(x + 1)$.

Знайдіть область визначення функції (**5.35–5.36**):

5.35. 1) $y = \log_{0,2}(1 - \cos x)$; 2) $y = \log_{x-1}(9 - x^2)$.

5.36. 1) $y = \log_5(1 + \sin x)$; 2) $y = \log_{x+1}(4 - x^2)$.

Розв'яжіть графічно рівняння (**5.37–5.38**):

5.37. 1) $\log_3 x = 1 - x$; 2) $\log_{\frac{1}{2}} x = 2x - 5$.

5.38. 1) $\log_4 x = 5 - x$; 2) $\log_{\frac{1}{3}} x = 2x - 2$.

Побудуйте графік функції (**5.39–5.40**):

5.39. 1) $y = 3^{\log_3(x+1)}$; 2) $y = 5^{\log_5(x^2-4)}$.

5.40. 1) $y = 4^{\log_4(x-1)}$; 2) $y = 7^{\log_7(1-x^2)}$.

Життєва математика

5.41. Літо – спекотна пора року. Лікарі радять під час спеки пити багато води, адже її втрата на 10–12 % стає небезпечною для життя людини. Маса учениці 11 класу 54 кг, а вода становить 65 % маси тіла. Втрата якої кількості води небезпечна для учениці?

5.42. 1) Під час чищення зубів кожен із 5 членів родини Терещенків замість того, щоб набрати воду в індивідуальний стакан, користується постійним протоком. Це призводить до того, що марно витрачаються приблизно 4 л води за 1 хв. Скільки літрів води може зекономити родина Терещенків за місяць, у якому 30 днів, якщо кожен чистить зуби двічі на день протягом 3 хв щоразу?
2) (*Практична діяльність.*) Дізнайтеся, скільки коштує 1 м^3 води у вашій місцевості. Обчисліть, скільки грошей зекономить ваша родина протягом місяця при ощадливому користуванні водою.

Перевірте свою компетентність!

Завдання № 5

1. Графік якої з функцій паралельний графіку функції $y = 7x - 5$?

А	Б	В	Г	Д
$y = -7x + 5$	$y = \frac{1}{7}x - 5$	$y = -5$	$y = 7x + 2$	$y = -\frac{1}{7}x + 5$

2. Розв'яжіть рівняння $0,2^{2x-1} = 0,008$.

А	Б	В	Г	Д
0	0,5	1	1,5	2

3. Знайдіть $y'(-2)$, якщо $y(x) = \dfrac{x-2}{3+x}$.

А	Б	В	Г	Д
-2	-4	-5	5	інша відповідь

4. Спростіть вираз $\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right) - \cos(\pi+\alpha)$.

А	Б	В	Г	Д
0	$2\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$2\sin\alpha$	інша відповідь

5. a_n – арифметична прогресія, $a_1 = 1$, $a_3 = 9$. Знайдіть a_2.

А	Б	В	Г	Д
5	3	3 або -3	5 або -5	-3

6. У коробці 6 білих кульок і декілька чорних. Скільки чорних кульок у коробці, коли ймовірність того, що вибрана навмання кулька біла, дорівнює $\dfrac{3}{5}$?

А	Б	В	Г	Д
1	2	3	4	5

7. Установіть відповідність між рівнянням (1–4) та його розв'язком (А–Д).

Рівняння

1 $\mathrm{tg}\,x = -1$

2 $\mathrm{tg}\,x = 0$

3 $\mathrm{ctg}\,x = 1$

4 $\mathrm{ctg}\,x = 0$

Розв'язок рівняння

А $\dfrac{\pi}{4} + 2\pi k,\ k \in Z$

Б $\dfrac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in Z$

В $\dfrac{\pi}{4} + \pi k,\ k \in Z$

Г $\pi k,\ k \in Z$

Д $-\dfrac{\pi}{4} + \pi k,\ k \in Z$

	А	Б	В	Г	Д
1					
2					
3					
4					

8. Знайдіть найбільше значення функції $y = \dfrac{1}{5\sin x + 7}$.

9. Обчисліть $\sqrt[3]{5+2\sqrt{6}} \cdot \sqrt[6]{49-20\sqrt{6}}$.

§ 6. ЛОГАРИФМІЧНІ РІВНЯННЯ

Рівняння називають *логарифмічним*, якщо його змінні входять лише під знаки логарифмів.

Приклади логарифмічних рівнянь:

$\log_5 x = -1$, $\log_2 x + \log_4 x = 7$, $\lg(3 - x) = \lg(2 + x^2)$ тощо.

Розглянемо деякі види логарифмічних рівнянь і методи їх розв'язування.

1. Найпростіші логарифмічні рівняння

Розглянемо найпростіше логарифмічне рівняння $\log_a x = b$.

Функція $y = \log_a x$ зростає або спадає на всій своїй області визначення, а тому кожного свого значення набуває лише при одному значенні аргументу. Оскільки множиною значень функції $y = \log_a x$ є $(-\infty; +\infty)$, то рівняння $\log_a x = b$ має єдиний розв'язок при будь-якому b, який можна знайти, використовуючи означення логарифма: $x = a^b$.

Задача 1. Розв'язати рівняння:

1) $\log_2 x = -3$; 2) $\log_5 (x - 1) = 2$; 3) $\log_{\frac{1}{3}}(x^2 - 2x) = 0$.

Розв'язання. 1) $\log_2 x = -3$; $x = 2^{-3}$; $x = \frac{1}{8}$.

2) $\log_5 (x - 1) = 2$; $x - 1 = 5^2$; $x - 1 = 25$; $x = 26$.

3) $\log_{\frac{1}{3}}(x^2 - 2x) = 0$; $x^2 - 2x = \left(\frac{1}{3}\right)^0$; $x^2 - 2x - 1 = 0$; $x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{2}$.

Відповідь. 1) $\frac{1}{8}$; 2) 26; 3) $1 \pm \sqrt{2}$.

2. Рівняння виду $\log_a f(x) = \log_a g(x)$

Область допустимих значень рівняння $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ задається системою $\begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) > 0. \end{cases}$

Оскільки функція $y = \log_a x$ – монотонна при $x > 0$ (зростає при $a > 1$ і спадає при $0 < a < 1$) і кожного свого значення набуває лише при одному значенні аргументу, то отримаємо, що на області визначення рівняння $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ рівносильне рівнянню $f(x) = g(x)$.

Можна зробити висновок, що рівняння $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ рівносильне системі

$$\begin{cases} f(x) = g(x), \\ f(x) > 0, \\ g(x) > 0. \end{cases}$$

Оскільки в систему входять рівняння $f(x) = g(x)$ і нерівність $f(x) > 0$, то при виконанні цих умов нерівність $g(x) > 0$ виконується автоматично (аналогічно і при виконанні нерівності $g(x) > 0$ нерівність $f(x) > 0$ виконується автоматично).

Отже, остаточно отримаємо:

рівняння $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ *рівносильне системі*

$$\begin{cases} f(x) = g(x), \\ f(x) > 0 \end{cases} \text{ або } \begin{cases} f(x) = g(x), \\ g(x) > 0. \end{cases}$$

Зауважимо, що з нерівностей $f(x) > 0$ або $g(x) > 0$ вибираємо ту, яка є простішою. Якщо обидві нерівності є складними, то алгоритм розв'язування буде такий: записуємо систему, розв'язуємо рівняння $f(x) = g(x)$ та перевіряємо корені.

Задача 2. Розв'язати рівняння $\log_2(x^2 + 2x - 7) = \log_2(x - 1)$.

Розв'язання. Рівняння рівносильне системі:

$$\begin{cases} x^2 + 2x - 7 = x - 1, \\ x - 1 > 0; \end{cases} \begin{cases} x^2 + x - 6 = 0, \\ x > 1. \end{cases}$$

Розв'язуючи рівняння $x^2 + x - 6 = 0$, маємо $x_1 = 2$; $x_2 = -3$. Перший корінь задовольняє умову $x > 1$, а другий – ні. Отже, $x = 2$ – єдиний корінь рівняння.

Відповідь. 2.

3. Рівняння виду $\log_a f(x) = g(x)$

Рівняння виду $\log_a f(x) = g(x)$ рівносильне рівнянню $f(x) = a^{g(x)}$. Зауважимо, що розглядати $f(x) > 0$ (область допустимих значень рівняння) немає потреби, оскільки вираз $a^{g(x)}$ є додатним і $f(x) = a^{g(x)}$, а тому умова $f(x) > 0$ виконується автоматично.

Задача 3. Розв'язати рівняння $\log_3(9^x + 18) = x + 2$.

Розв'язання. Дане рівняння рівносильне такому: $9^x + 18 = 3^{x+2}$; $9^x - 3^2 \cdot 3^x + 18 = 0$. Нехай $3^x = t$, $t > 0$. Тоді $t^2 - 9t + 18 = 0$; $t_1 = 3$; $t_2 = 6$. Підставивши отримані розв'язки, маємо: $3^x = 3$ і $x_1 = 1$ або $3^x = 6$ і $x = \log_3 6$; $x = \log_3(3 \cdot 2)$; $x = 1 + \log_3 2$.

Відповідь. 1; $1 + \log_3 2$.

4. Рівняння, які зводяться до простіших за допомогою властивостей логарифмів

Під час розв'язування більш складних логарифмічних рівнянь можна дотримуватися нижченаведеного алгоритму розв'язування:

1) *Знаходимо область допустимих значень рівняння.*
2) *За допомогою властивостей логарифмів зводимо рівняння до одного з раніше розглянутих типів.*
3) *Розв'язуємо отримане рівняння, перевіряємо належність коренів області допустимих значень.*
4) *Даємо відповідь.*

Розглянемо приклади.

Задача 4. Розв'язати рівняння $\log_5(x-3)+\log_5(x+1)=1$.

Розв'язання. 1) Область допустимих значень знайдемо із системи: $\begin{cases} x-3>0, \\ x+1>0; \end{cases}$ $\begin{cases} x>3, \\ x>-1; \end{cases}$ $x>3$.

2) Використовуючи формулу $\log_a(bc)=\log_a b+\log_a c$ справа наліво на області допустимих значень, маємо

$$\log_5(x-3)(x+1)=1.$$

3) Тоді $(x-3)(x+1)=5^1$; $x^2-2x-8=0$; $x_1=-2$; $x_2=4$. Область допустимих значень задовольняє лише другий корінь.

Відповідь. 4.

Задача 5. Розв'язати рівняння $\frac{1}{2}\log_2(x+2)-\log_2(x-1)=1$.

Розв'язання. 1) Область допустимих значень знайдемо із системи: $\begin{cases} x+2>0, \\ x-1>0; \end{cases}$ $\begin{cases} x>-2, \\ x>1; \end{cases}$ $x>1$.

2) Домножимо ліву і праву частини рівняння на 2, щоб позбутися дробів:

$$\log_2(x+2)-2\log_2(x-1)=2.$$

Використаємо формулу $\log_a x^p=p\log_a x$ справа наліво:

$$\log_2(x+2)-\log_2(x-1)^2=2,$$

а потім – формулу $\log_a\frac{x}{y}=\log_a x-\log_a y$ справа наліво:

$$\log_2\frac{x+2}{(x-1)^2}=2.$$

3) Тоді $\frac{x+2}{(x-1)^2}=2^2$; $4x^2-9x+2=0$; $x_1=2$; $x_2=\frac{1}{4}$. Область допустимих значень задовольняє лише перший корінь.

Відповідь. 2.

5. Заміна змінних у логарифмічних рівняннях

Часто логарифмічні рівняння зводяться до алгебраїчних заміною $t=\log_a f(x)$.

Задача 6. Розв'язати рівняння

$$\log_4^2(x-1)+\log_4(x-1)-2=0.$$

Розв'язання. 1) Нехай $\log_4(x-1)=t$, тоді маємо рівняння

$$t^2+t-2=0;\ t_1=1;\ t_2=-2.$$

2) $\log_4(x-1)=1;\ x-1=4^1;\ x_1=5$ або

$\log_4(x-1)=-2;\ x-1=4^{-2};\ x_2=1\frac{1}{16}.$

Відповідь. $5;\ 1\frac{1}{16}$.

Задача 7. Розв'язати рівняння $\log_2 x+3\log_x 2=4$.

Розв'язання. 1) Використаємо формулу $\log_a b=\dfrac{1}{\log_b a}$, яка справджується при $a>0$, $a\neq 1$, $b>0$, $b\neq 1$ на області допустимих значень рівняння $x>0$, $x\neq 1$. Маємо

$$\log_2 x+3\cdot\frac{1}{\log_2 x}=4.$$

2) Нехай $\log_2 x=t$, $t+\dfrac{3}{t}-4=0$; $t_1=1$; $t_2=3$. Тоді $\log_2 x=1$; $x_1=2^1=2$; $\log_2 x=3$; $x_2=2^3=8$.

Відповідь. 2; 8.

● Які рівняння називають логарифмічними? ● Як розв'язати рівняння виду $\log_a x=b$? ● Як розв'язати рівняння виду $\log_a f(x)=\log_a g(x)$? ● Як розв'язати рівняння виду $\log_a f(x)=g(x)$? ● Якого алгоритму можна дотримуватися під час розв'язування складних логарифмічних рівнянь? ● Яку заміну змінних використовують у логарифмічних рівняннях?

Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

1 Розв'яжіть рівняння (6.1–6.10):

6.1. 1) $\log_2 x=1$; 2) $\log_{\frac{1}{3}} x=0$;

3) $\log_5 x=-1$; 4) $\log_7 x=2$.

6.2. 1) $\log_3 x=2$; 2) $\log_7 x=0$;

3) $\log_{\frac{1}{2}} x=1$; 4) $\log_6 x=-1$.

6.3. 1) $\log_2(x-1)=\log_2 17$; 2) $\log_{\frac{1}{8}}(x+3)=\log_{\frac{1}{8}} 5$.

6.4. 1) $\log_{\frac{1}{3}}(x+2)=\log_{\frac{1}{3}} 5$; 2) $\log_4(x-3)=\log_4 7$.

6.5. 1) $\log_{\frac{1}{4}}(x+5)=-2$; 2) $\log_2(3x-1)=3$;

3) $\log_{\frac{1}{3}}(x^2+2x)=-1$; 4) $\log_4(x^2+3x+1)=0$.

6.6. 1) $\log_{\frac{1}{5}}(x+2)=-1$; 2) $\log_3(5x+1)=2$;

3) $\log_{\frac{1}{2}}(x^2+3x)=-2$; 4) $\log_5(x^2-4x+1)=0$.

6.7. 1) $\log_{\frac{1}{7}}(2x-3)=\log_{\frac{1}{7}}(3x-2)$; 2) $\log_5(x+1)=\log_5(3x+4)$;

3) $\log_{\frac{1}{5}}(x^2-1)=\log_{\frac{1}{5}}(3x-3)$; 4) $\log_7(x^2+1)=\log_7(2x+7)$.

6.8. 1) $\log_{\frac{1}{8}}(2x+5)=\log_{\frac{1}{8}}(x+7)$;

2) $\log_{0,8}(x+2)=\log_{0,8}(2x+5)$;

3) $\log_4(x^2-4)=\log_4(5x-10)$;

4) $\log_{19}(x^2+4)=\log_{19}(x+4)$.

6.9. 1) $\log_3^2 x+2\log_3 x-3=0$; 2) $\log_{\frac{1}{7}}^2 x-\log_{\frac{1}{7}} x-2=0$.

6.10. 1) $\log_5^2 x-2\log_5 x+1=0$; 2) $\log_{\frac{1}{2}}^2 x-2\log_{\frac{1}{2}} x-3=0$.

6.11. Знайдіть абсциси точок перетину графіків функцій

$$y=\log_2(x^2+7x) \text{ і } y=3.$$

6.12. Знайдіть абсциси точок перетину графіків функцій

$$y=\log_{\frac{1}{3}}(x^2+8x) \text{ і } y=-2.$$

6.13. Знайдіть точку перетину графіків функцій

$$y=\log_{\frac{1}{3}}(x+1) \text{ і } y=\log_{\frac{1}{3}}(2x-1).$$

6.14. Знайдіть точку перетину графіків функцій

$$y=\log_5(x+4) \text{ і } y=\log_5(2x+3).$$

Розв'яжіть рівняння (**6.15–6.26**):

6.15. 1) $\log_3 x^2+\log_3 x^3=10$; 2) $5\log_2\sqrt[5]{x}-\log_2 x^4=9$.

6.16. 1) $\log_2 x^7+\log_2 x=24$; 2) $\log_{\frac{1}{3}} x^4-7\log_{\frac{1}{3}}\sqrt[7]{x}=12$.

6.17. 1) $\log_{0,25}^2(x^2+1)=1$; 2) $\log_{16}\log_2\log_{\sqrt[8]{3}} x=\frac{1}{2}$.

6.18. 1) $\log_2^2(1+x^2)=9$; 2) $\log_9\log_2\log_{\sqrt{3}} x=\frac{1}{2}$.

6.19. 1) $2\log_8(x+1)=\log_8(4x+1)$;

2) $\frac{1}{2}\log_{\frac{1}{3}}(2x-1)=\log_{\frac{1}{3}}(4x-3)$.

6.20. 1) $2\log_{\frac{1}{7}}(x-1)=\log_{\frac{1}{7}}(2x-3)$;

2) $\frac{1}{2}\log_7(x+1)=\log_7(8x+1)$.

6.21. 1) $\log_2(3\cdot 2^x-4)=x$; 2) $\log_7(7^{x-1}-42)=x-2$.

6.22. 1) $\log_3(4\cdot 3^x-27)=x$; 2) $\log_5(5^{x+2}-20)=x+1$.

6.23. 1) $\log_3(x+1)+\log_3(2x-1)=2$;

2) $\log_7(2x-1)=2\log_7 3-\log_7(x-4)$;

3) $\log_3(3-x)-1=2\log_3 2-\log_3(4-x)$;

4) $\log_2(2x-1)+\log_2(x+1)=\log_2(x+2)+2$.

6.24. 1) $\log_5(x-4)+\log_5(10-x)=1$;

2) $\log_2(x+2)+\log_2(x+3)=\log_2 3+1$;

3) $\lg(x-1)-2=\lg(2x-11)-\lg 50$;

4) $\log_3(x+3)+1=\log_3(3x-1)+\log_3(x+1)$.

6.25. 1) $\log_7^2(x+1)-2\log_7(x+1)-3=0$;

2) $\log_2^2 x-\log_2 x^2-8=0$;

3) $\log_3^2(x+1)-12\log_3\sqrt[4]{x+1}=0$;

4) $\frac{4}{\log_2 x+1}-\frac{2}{3-\log_2 x}=1$.

6.26. 1) $\log_5^2(x-2)+3\log_5(x-2)-4=0$;

2) $\log_4^2 x-\log_4 x^3=0$;

3) $\log_4^2(x-1)-6\log_4\sqrt[3]{x-1}+1=0$;

4) $\frac{2}{\log_3 x}+\frac{1}{\log_3 x-2}=1$.

6.27. Знайдіть цілі корені рівняння $\frac{2}{\log_7 x-1}-\frac{1}{\log_7 x-3}=3$.

6.28. Знайдіть корені рівняння $\log_{\frac{1}{3}}x+2\log_x\frac{1}{3}=3$.

6.29. Знайдіть корені рівняння $\log_5 x-3\log_x 5=2$.

4

Розв'яжіть рівняння (**6.30–6.37**):

6.30. 1) $\log_3(6+3^x)=3-x$; 2) $\log_{-2x}(2x^2-x-1)=1$.

6.31. 1) $\log_2(4+2^x)=5-x$; 2) $\log_{2x}(x^2+x-2)=1$.

6.32. $\log_3(16^x-3)+\log_3(16^x-1)=1$.

6.33. $\log_2(9^x - 1) + \log_2(9^x - 2) = 1.$

6.34. $\frac{1}{2}\log_7(3x - 6) + \log_7 2 = \log_7(x - 2).$

6.35. $\frac{1}{2}\log_3(3x + 1) - \log_3 2 = \log_3(x - 3).$

6.36. 1) $\log_2(2x)\cdot\log_2\left(\frac{1}{2}x\right) = 3;$ 2) $5 - \log_7 x = 4\sqrt{\log_7 x}.$

6.37. 1) $\log_3(9x)\cdot\log_3\left(\frac{1}{9}x\right) = 5;$ 2) $4 - \log_2 x = 3\sqrt{\log_2 x}.$

6.38. Скільки коренів має рівняння $\frac{\log_3(2x^2 - x)}{\log_7(2x - 1)} = 0$?

6.39. Скільки коренів має рівняння $\frac{\log_5(2x^2 + x)}{\log_2(3 - 4x)} = 0$?

Розв'яжіть рівняння (**6.40–6.42**):

6.40. 1) $\sqrt{x+2}\cdot\log_5(x-1) = 0;$ 2) $\sqrt{x-3}\cdot\log_2(x+1) = 0.$

6.41. 1) $\sqrt{x+2}\cdot\log_7(x+1) = 0;$ 2) $\sqrt{1-x}\cdot\log_5(x-2) = 0.$

6.42. 1) $|x|\cdot\log_2 x = 4x;$ 2) $|x|\cdot\log_{\frac{1}{3}}(-x) = 2x.$

Життєва математика

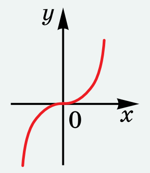
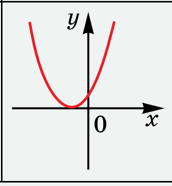
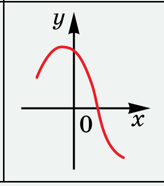
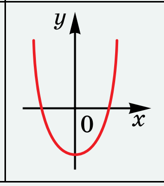
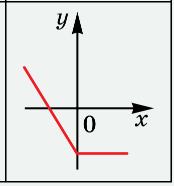
6.43. Прожитковий мінімум в Україні на грудень 2018 року становить 1921 грн на працездатну особу, 1626 грн на дітей віком до 6 років і 2027 грн на дітей віком від 6 до 18 років. Родина складається з 5 осіб: тато, мама, Катруся (4 роки) та школярі Марічка (13 років) та Сашко (8 років). Яким має бути дохід родини за грудень 2018 року, щоб він дорівнював:
1) прожитковому мінімуму;
2) 1,5 прожиткового мінімуму;
3) 2 прожитковим мінімумам?

6.44. Гумові покришки коліс автомобіля стираються, і щорічно кожен автомобіль розсіює в повітря 10 кілограмів гумового пилу. Скільки такого пилу здатні виробити за рік усі автомобілі невеличкого містечка, у якому проживають 6000 родин, 20 % яких мають по одному автомобілю, а 5 % – по два автомобілі?

Перевірте свою компетентність!

Завдання № 6

1. На якому з малюнків зображено графік парної функції?

А	Б	В	Г	Д
				

2. Скільки цілих розв'язків має нерівність $0{,}3^{x^2+x} > 0{,}09$?

А	Б	В	Г	Д
0	1	2	3	безліч

3. Тіло рухається прямолінійно за законом $s(t) = t^2 - 14t$ (t вимірюється в секундах, s – у метрах). У який момент часу тіло зупиниться?

А	Б	В	Г	Д
$t = 1$ с	$t = 7$ с	$t = 14$ с	$t = 18$ с	$t = 20$ с

4. Між якими послідовними цілими числами міститься число $\sqrt[3]{-7}$?

А	Б	В	Г	Д
1 і 2	0 і 1	-1 і 0	-2 і -1	-3 і -2

5. Обчисліть $\cos 240° + \sin 210°$.

А	Б	В	Г	Д
$\sqrt{3}$	$-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}$	1	-1	$-\sqrt{3}$

6. Перед початком футбольного матчу кожен з футболістів, яких у кожній з команд по 11, потиснув руку кожному зі своїх суперників і кожному з трьох суддів. Скільки всього було рукостискань?

А	Б	В	Г	Д
121	187	242	154	308

7. Установіть відповідність між числовим виразом (1–4) та значенням цього виразу (А–Д).

Числовий вираз		*Значення виразу*	
1	$\log_{27}9$	**А**	$\frac{1}{3}$
2	$\log_9 27$	**Б**	$\frac{1}{2}$
3	$\log_{27}3$	**В**	$\frac{2}{3}$
4	$\log_3\sqrt{3}$	**Г**	$\frac{3}{2}$
		Д	2

	А	Б	В	Г	Д
1					
2					
3					
4					

8. За графіком потяг долає перегон у 80 км за деякий час, але оскільки він вимушений був зменшити швидкість на 10 км/год, то подолав перегон з 24-хвилинним запізненням. Якою є швидкість потяга за графіком (у км/год)?

9. Знайдіть у градусах найменший додатний корінь рівняння $\cos 2x - 5\cos x - 2 = 0$.

§ 7. ЛОГАРИФМІЧНІ НЕРІВНОСТІ

Аналогічно рівнянню *нерівність* називають *логарифмічною*, якщо її змінна входить лише під знак логарифма.

Приклади логарифмічних нерівностей:

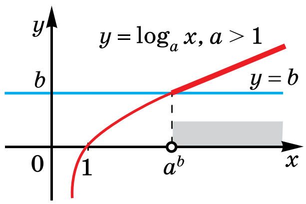
$\log_5 x > -1$, $\log_3(x+1) + \log_3 x > 2$ тощо.

1. Найпростіші логарифмічні нерівності

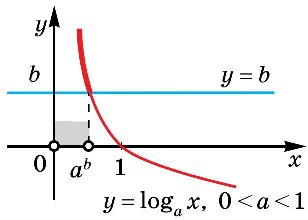
До найпростіших логарифмічних нерівностей належать такі: $\log_a x > b$, $\log_a x < b$, $\log_a x \geqslant b$, $\log_a x \leqslant b$, де $a > 0$, $a \neq 1$, b – число.

Розглянемо для прикладу нерівність $\log_a x > b$. Число b можна подати як $b = \log_a a^b$. Маємо $\log_a x > \log_a a^b$.

Якщо $a > 1$, то функція $y = \log_a x$ зростає і більшому значенню функції відповідає більше значення аргументу (мал. 7.1). Тому з нерівності $\log_a x > \log_a a^b$ випливає $x > a^b$ (знак нерівності не змінюється). Оскільки $a^b > 0$ (для будь-яких $a > 0$, $a \neq 1$, $b \in R$), то всі значення x, які задовольняють нерівність $x > a^b$, задовольняють також і область допустимих значень нерівності $x > 0$. Остаточний розв'язок нерівності: $x > a^b$.



Мал. 7.1



Мал. 7.2

Якщо $0 < a < 1$, то функція $y = \log_a x$ спадає і більшому значенню функції відповідає менше значення аргументу (мал. 7.2). Тому з нерівності $\log_a x > \log_a a^b$ випливає нерівність $x < a^b$ (знак нерівності змінюється на протилежний). Але в цьому випадку немає гарантій того, що всі значення, які задовольняють нерівність $x < a^b$, задовольняють також і область допустимих значень нерівності $x > 0$, тому розв'язками нерівності $\log_a x > \log_a a^b$ у випадку $0 < a < 1$ є такі значення x, для яких $0 < x < a^b$.

За допомогою аналогічних міркувань розв'язують нерівності $\log_a x < b$, $\log_a x \geqslant b$, $\log_a x \leqslant b$.

Отже, *під час розв'язування найпростіших логарифмічних нерівностей враховуємо таке:*

1) *якщо* $a > 1$, *то при переході від логарифмічної нерівності до нерівності, яка не містить логарифмів, знак нерівності не змінюємо; якщо* $0 < a < 1$, *то змінюємо на протилежний*;

2) *якщо в отриманій нерівності немає гарантії того, що значення* x *додатне, то враховуємо область допустимих значень:* $x > 0$; *якщо така гарантія є, то враховувати область допустимих значень немає потреби.*

Аналогічно розв'язують і нерівність $\log_a f(x) > b$ та подібні.

Задача 1. Розв'язати нерівність:

1) $\log_3 x > -1$; 2) $\log_{\frac{1}{2}} x \geqslant -2$;

3) $\log_7 (x-2) < 2$; 4) $\log_{\frac{1}{5}} (x+1) \leqslant -1$.

Розв'язання. 1) $\log_3 x > -1$; $\log_3 x > \log_3 3^{-1}$; $x > 3^{-1}$; $x > \frac{1}{3}$.

2) $\log_{\frac{1}{2}} x \geqslant -2$; $\log_{\frac{1}{2}} x \geqslant \log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$; $0 < x \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$; $0 < x \leqslant 4$.

3) $\log_7 (x-2) < 2$; $\log_7 (x-2) < \log_7 7^2$; $0 < x-2 < 7^2$; $2 < x < 51$.

4) $\log_{\frac{1}{5}} (x+1) \leqslant -1$; $\log_{\frac{1}{5}} (x+1) \leqslant \log_{\frac{1}{5}} \left(\frac{1}{5}\right)^{-1}$; $x+1 \geqslant \left(\frac{1}{5}\right)^{-1}$;

$x+1 \geqslant 5$; $x \geqslant 4$.

Відповідь. 1) $x > \frac{1}{3}$; 2) $0 < x \leqslant 4$; 3) $2 < x < 51$; 4) $x \geqslant 4$.

2. Нерівності виду $\log_a f(x) > \log_a g(x)$, $\log_a f(x) \geqslant \log_a g(x)$

Область допустимих значень кожної з нерівностей $\log_a f(x) > \log_a g(x)$, $\log_a f(x) \geqslant \log_a g(x)$ задається системою $\begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) > 0. \end{cases}$

Далі враховуємо вищезазначений принцип.

Якщо $a > 1$, то знак нерівності не змінюється, і тому нерівність $\log_a f(x) > \log_a g(x)$ рівносильна системі $\begin{cases} f(x) > g(x), \\ f(x) > 0, \\ g(x) > 0, \end{cases}$

а нерівність $\log_a f(x) \geqslant \log_a g(x)$ – системі $\begin{cases} f(x) \geqslant g(x), \\ f(x) > 0, \\ g(x) > 0. \end{cases}$

Оскільки в кожній із систем $g(x) > 0$, а $f(x) > g(x)$ (або $f(x) \geqslant g(x)$), то умова $f(x) > 0$ виконується автоматично, і до системи її можна не писати.

Якщо $0 < a < 1$, то знак нерівності змінюється на протилежний, і тому:

нерівність $\log_a f(x) > \log_a g(x)$ рівносильна системі $\begin{cases} f(x) < g(x), \\ f(x) > 0, \\ g(x) > 0, \end{cases}$

а нерівність $\log_a f(x) \geqslant \log_a g(x)$ – системі $\begin{cases} f(x) \leqslant g(x), \\ f(x) > 0, \\ g(x) > 0. \end{cases}$

Оскільки в кожній із систем $f(x) > 0$, а $g(x) > f(x)$ (або $g(x) \geqslant f(x)$), то умова $g(x) > 0$ виконується автоматично, і до системи її можна не писати.

Узагальнимо метод розв'язування нерівності $\log_a f(x) > \log_a g(x)$ у вигляді таблиці (нерівність $\log_a f(x) \geqslant \log_a g(x)$ розв'язується аналогічно):

$\log_a f(x) > \log_a g(x)$	
$0 < a < 1$	$a > 1$
Знак нерівності змінюється на протилежний $\begin{cases} f(x) < g(x), \\ f(x) > 0 \end{cases}$	Знак нерівності не змінюється $\begin{cases} f(x) > g(x), \\ g(x) > 0 \end{cases}$

Задача 2. Розв'язати нерівність:

1) $\log_{\frac{1}{2}}(x-2) > \log_{\frac{1}{2}}(2x-3)$; 2) $\log_5(x^2 - 3) \geqslant \log_5(x - 1)$.

Розв'язання. 1) Оскільки $0 < \frac{1}{2} < 1$, то знак нерівності змінюємо на протилежний: $x - 2 < 2x - 3$. Крім того, враховуємо, що: $x - 2 > 0$ (умова $2x - 3 > 0$ буде виконуватися автоматично). Отже, маємо:

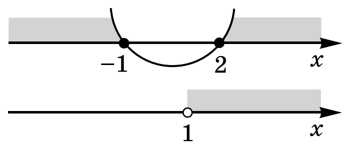
$$\begin{cases} x-2 < 2x-3, \\ x-2 > 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x > 1, \\ x > 2; \end{cases} \quad x > 2.$$

2) Оскільки $5 > 1$, то знак нерівності не змінюємо: $x^2 - 3 \geqslant x - 1$. Крім того, враховуємо, що: $x - 1 > 0$ (умова $x^2 - 3 > 0$ буде виконуватися автоматично). Отже, маємо:

$$\begin{cases} x^2-3 \geqslant x-1, \\ x-1 > 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x^2-x-2 \geqslant 0, \\ x > 1. \end{cases}$$

Розв'язки першої нерівності: $x \leqslant -1$ і $x \geqslant 2$ (мал. 7.3 – схема вгорі). Враховуючи, що $x > 1$, маємо розв'язок системи: $x \geqslant 2$.

Відповідь. 1) $x > 2$; 2) $x \geqslant 2$.



Мал. 7.3

3. Розв'язування складніших логарифмічних нерівностей

Під час розв'язування більш складних логарифмічних нерівностей використовуємо прийоми розв'язування логарифмічних рівнянь і принципи, за якими розв'язуються найпростіші логарифмічні нерівності.

Задача 3. Розв'язати нерівність $\log_2(x - 1) + \log_2(x + 5) < 4$.

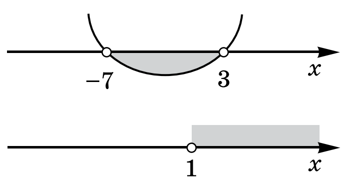
Розв'язання. 1) Область допустимих значень знайдемо із системи:

$$\begin{cases} x-1 > 0, \\ x+5 > 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x > 1, \\ x > -5; \end{cases} \quad x > 1.$$

На цій області визначення маємо: $\log_2(x - 1)(x + 5) < 4$;
$(x - 1)(x + 5) < 2^4$ (бо $2 > 1$).

Оскільки $x - 1 > 0$ і $x + 5 > 0$ (враховано в ОДЗ), то умова $(x - 1)(x + 5) > 0$ виконується автоматично.

2) Маємо: $x^2 + 5x - x - 5 < 16$; $x^2 + 4x - 21 < 0$. Звідси $-7 < x < 3$ (мал. 7.4 – схема вгорі).



Мал. 7.4

3) Потрібно врахувати область визначення функції: $x > 1$ (мал. 7.4 – схема внизу). Отже, розв'язком даної нерівності є переріз множин $-7 < x < 3$ і $x > 1$, тобто $1 < x < 3$.

Відповідь. $1 < x < 3$.

Задача 4. Розв'язати нерівність $\log^2_{\frac{1}{3}} x - 2\log_{\frac{1}{3}} x - 3 \geqslant 0$.

Розв'язання. 1) Нехай $\log_{\frac{1}{3}} x = t$. Тоді $t^2 - 2t - 3 \geqslant 0$, звідки $t \leqslant -1$ або $t \geqslant 3$ (розв'яжіть нерівність самостійно).

2) Маємо: $\log_{\frac{1}{3}} x \leqslant -1$ і $x \geqslant \left(\frac{1}{3}\right)^{-1}$; $x \geqslant 3$

або $\log_{\frac{1}{3}} x \geqslant 3$ і $0 < x \leqslant \left(\frac{1}{3}\right)^{3}$; $0 < x \leqslant \frac{1}{27}$.

Отже, $0 < x \leqslant \frac{1}{27}$ або $x \geqslant 3$.

Відповідь. $0 < x \leqslant \frac{1}{27}$ або $x \geqslant 3$.

- Які нерівності називають логарифмічними? • Як розв'язати нерівність $\log_a x > b$ при $a > 1$ і при $0 < a < 1$? • До якої системи зводиться нерівність $\log_a f(x) > \log_a g(x)$ при $a > 1$ і при $0 < a < 1$?

Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

1 Розв'яжіть нерівність **(7.1–7.8)**:

7.1. 1) $\log_5 x > \log_5 7$; 2) $\log_{\frac{1}{3}} x \geqslant \log_{\frac{1}{3}} 2$;

3) $\log_{\frac{1}{2}} x < \log_{\frac{1}{2}} 3$; 4) $\log_7 x \leqslant \log_7 9$.

7.2. 1) $\log_6 x \geqslant \log_6 8$; 2) $\log_{\frac{1}{2}} x > \log_{\frac{1}{2}} 5$;

3) $\log_{\frac{1}{3}} x \leqslant \log_{\frac{1}{3}} 5$; 4) $\log_8 x < \log_8 7$.

2 **7.3.** 1) $\log_2 x < 0$; 2) $\log_{\frac{1}{5}} x \leqslant -1$;

3) $\log_{\frac{1}{3}} x > 3$; 4) $\log_6 x \geqslant 1$.

7.4. 1) $\log_7 x \leqslant 1$; 2) $\log_{\frac{1}{4}} x < -1$;

3) $\log_{\frac{1}{5}} x \geqslant 0$; 4) $\log_4 x > -2$.

7.5. 1) $\log_4(x-1) \geqslant 2$; 2) $\log_7(x+1) < -1$;
3) $\log_{\frac{1}{2}}(x+2) > -3$; 4) $\log_{0,1}(x-2) \leqslant 2$.

7.6. 1) $\log_5(x+1) > 1$; 2) $\log_4(x-5) \leqslant 2$;
3) $\log_{0,5}(x-5) \geqslant -2$; 4) $\log_{\frac{1}{3}}(x+7) < 1$.

7.7. 1) $\log_5(x+1) > \log_5(3-x)$; 2) $\log_{\frac{1}{7}}(x-2) > \log_{\frac{1}{7}}(2x-6)$.

7.8. 1) $\log_7(5-x) < \log_7(3+x)$; 2) $\log_{\frac{1}{2}}(2x+3) < \log_{\frac{1}{2}}(x+5)$.

3 Знайдіть область визначення функції (**7.9–7.10**):

7.9. 1) $y=\sqrt{\log_2(x-1)}$; 2) $y=\dfrac{1}{\sqrt{\log_{\frac{1}{3}}(x+1)}}$.

7.10. 1) $y=\dfrac{1}{\sqrt{\log_5(x+3)}}$; 2) $y=\sqrt{\log_{\frac{1}{2}}(x-3)}$.

Розв’яжіть нерівність (**7.11–7.16**):

7.11. 1) $\log_3(x^2-2x) \leqslant 1$; 2) $\log_{0,5}(x^2-3x) < -2$.

7.12. 1) $\log_3(x^2-8x) \geqslant 2$; 2) $\log_{\frac{1}{5}}(x^2+4x) > -1$.

7.13. 1) $\log_2(x+1) + \log_2 x \leqslant 1$;
2) $\log_3(x-1) + \log_3 x > \log_3 2 + 1$.

7.14. 1) $\log_2(x-2) + \log_2(x-1) > 1$;
2) $\lg x + \lg(x+1) \leqslant \lg 3 + 1$.

7.15. 1) $\log_{0,5}^2 x + \log_{0,5} x - 2 \geqslant 0$; 2) $\lg^2 x < 4$.

7.16. 1) $\log_3^2 x - \log_3 x - 2 < 0$; 2) $\log_{\frac{1}{2}}^2 x \geqslant 1$.

7.17. При яких значеннях x функція $y=\dfrac{\lg x-2}{x^2+3}$ набуває додатних значень?

7.18. При яких значеннях x функція $y=\dfrac{\log_{0,1} x+1}{x^2+5}$ набуває від’ємних значень?

4 Розв’яжіть нерівність (**7.19–7.22**):

7.19. 1) $\log_{0,1}(x^2+2x-3) > \log_{0,1}(x-1)$;
2) $2\log_5(x+4) > \log_5(10x+15)$.

7.20. 1) $\log_{0,9}(x^2-2x-3) > \log_{0,9}(9-x)$;
2) $2\log_3(x+1) > \log_3(2x+5)$.

7.21. 1) $|\lg x - 1| \leqslant 2$; 2) $|\log_{0,5} x - 3| > 1$.

7.22. 1) $|\log_{0,2} x + 1| \leqslant 1$; 2) $|\lg x - 2| > 3$.

7.23. Знайдіть найбільший цілий розв'язок нерівності

$$\log_{0,7}(x + 1) + \log_{0,7}(5 - x) \geqslant \log_{0,7}(x + 7).$$

7.24. Знайдіть найбільший цілий розв'язок нерівності

$$\log_8(x + 2) + \log_8(6 - x) \leqslant \log_8(x + 8).$$

7.25. Скільки цілих розв'язків має нерівність

$$\log_{\frac{1}{7}} \log_5 (x^2 - 4) > 0?$$

7.26. Скільки цілих розв'язків має нерівність

$$\log_{\frac{1}{9}} \log_4 (x^2 - 5) \geqslant 0?$$

7.27. Розв'яжіть графічно нерівність $\log_3 x < 4 - x$.

7.28. Розв'яжіть графічно нерівність $\log_{\frac{1}{2}} x > x - 3$.

7.29. Розв'яжіть нерівність для всіх значень параметра a:
1) $a \cdot \log_5 x \geqslant 0$; 2) $a \cdot \log_3 x > 1$.

Життєва математика

7.30. Після уроків у класах деякої школи було зібрано 0,9 кг паперового сміття.

1) Якщо учні школи залишатимуть щодня таку кількість паперу, то скільки можна зібрати макулатури за 190 навчальних днів у цій школі? У 30 школах району?
2) Для виробництва 1 т паперу потрібно приблизно 900 м^3 лісу. Якщо учні шкіл району здадуть усі паперові відходи за рік, то скільки лісу вони збережуть від вирубки (у м^3)?
3) (*Проектна діяльність.*) Об'єднайтеся у групу по 2–3 учні (учениці). Дослідіть питання, як можна використовувати паперові відходи. Підготуйте презентацію для виступу перед класом.

7.31. Прибуток малого підприємства щомісячно протягом півроку збільшувався на 10 % відносно прибутку за попередній місяць. Податок на прибуток підприємства (ППП) в Україні становить 18 %. Яка величина сплаченого ППП за ці півроку, якщо прибуток за перший місяць підприємства складав 20 000 грн? Округлити до гривень.

Підготуйтеся до вивчення нового матеріалу

7.32. Знайдіть похідну функції:

1) $f(x) = x^4$; 2) $f(x) = x^{-3}$; 3) $f(x) = \cos x$;
4) $g(x) = 5$; 5) $g(x) = \sqrt{x}$; 6) $g(x) = \operatorname{tg} x$.

7.33. 1) Знайдіть похідні функцій: $y = x^2$, $y = x^2 - 7$, $y = x^2 + 8$.
2) Переконайтеся в тому, що $(x^2)' = (x^2 - 7)' = (x^2 + 8)'$.

7.34. Знайдіть похідну функції:

1) $f(x) = 2\sin x - x$; 2) $g(x) = 3\operatorname{ctg} x - \frac{5}{x} + 11$.

Перевірте свою компетентність!

Завдання № 7

1. Розв'яжіть рівняння $5^x = \frac{2\sqrt{5}}{10}$.

А	Б	В	Г	Д
$-1,5$	$-0,5$	$0,5$	$1,5$	інша відповідь

2. Обчисліть $\frac{1}{2}\log_3 9 - 3\log_8 16$.

А	Б	В	Г	Д
-5	-4	-3	-2	-1

3. Вартість телевізора «Альфа» перевищує вартість телевізора «Бета» на 150 %. У скільки разів телевізор «Альфа» дорожчий за телевізор «Бета»?

А	Б	В	Г	Д
у 1,5 раза	у 1,8 раза	у 2 рази	у 2,5 раза	у 2,8 раза

4. Який з коренів рівняння $\frac{4}{\operatorname{tg} x - 1} = 2$ належить проміжку $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$?

А	Б	В	Г	Д
$\operatorname{arctg} 3$	$\operatorname{arcctg} 3$	$\operatorname{arctg} \frac{1}{3}$	$\operatorname{arctg} 5$	жоден корінь не належить цьому проміжку

5. Обчисліть значення похідної функції $f(x) = 2\cos x - 5\sin x$ у точці $x_0 = \frac{\pi}{2}$.

А	Б	В	Г	Д
3	–2	2	–7	–3

6. Обчисліть $\left(\sin\frac{\pi}{12} + \cos\frac{\pi}{12}\right)^2 - \operatorname{tg}\frac{\pi}{7}\operatorname{ctg}\frac{\pi}{7}$.

А	Б	В	Г	Д
–1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1

7. Установіть відповідність між означенням елементів прогресії (1–4) і набором чисел (А–Д), які можуть бути цими елементами.

Означення елементів прогресії

1 послідовні три елементи арифметичної прогресії з різницею $d = 3$

2 послідовні три елементи арифметичної прогресії з різницею $d = -3$

3 послідовні три елементи геометричної прогресії зі знаменником $q = 3$

4 послідовні три елементи геометричної прогресії зі знаменником $q = -3$

Набір чисел

А $\frac{1}{9}$; $\frac{1}{3}$; 1

Б 1; 3; 5

В –2; 1; 4

Г 1; –3; 9

Д 1; –2; –5

	А	Б	В	Г	Д
1					
2					
3					
4					

8. У коробці білих намистин утричі більше, ніж чорних. Визначте ймовірність того, що навмання взята з коробки намистина буде чорною.

9. Знайдіть значення виразу $\left(\frac{\sqrt[4]{a}-4}{\sqrt[4]{a}+4} + \frac{\sqrt[4]{a}+4}{\sqrt[4]{a}-4}\right) \cdot \frac{\sqrt{a}-16}{64+4\sqrt{a}}$, якщо $a = 2019$.

Домашня самостійна робота № 1

Кожне завдання має по чотири варіанти відповіді (А–Г), серед яких лише один є правильним. Оберіть правильний варіант відповіді.

1 **1.** Порівняйте a і b, якщо $\log_{0,7} a > \log_{0,7} b$.
А. $a > b$ **Б.** $a \geqslant b$ **В.** $a < b$ **Г.** $a = b$

2. Розв'яжіть рівняння $5^{x+2} = 125$.
А. 3 **Б.** 1 **В.** −1 **Г.** 5

3. Розв'яжіть нерівність $\left(\frac{1}{7}\right)^x \leqslant \left(\frac{1}{7}\right)^3$.
А. $[3; +\infty)$ **Б.** $(3; +\infty)$ **В.** $(-\infty; 3]$ **Г.** $(-\infty; 3)$

2 **4.** Обчисліть $\log_3 162 - \log_3 2$.
А. 81 **Б.** 27 **В.** 3 **Г.** 4

5. Розв'яжіть рівняння $2^{x+3} - 2^x = 56$.
А. 2 **Б.** 8 **В.** 3 **Г.** 0

6. Розв'яжіть рівняння $\log_9(x^2 - 2) = \log_9(3x + 2)$.
А. −1; 4 **Б.** −1
В. Рівняння не має розв'язків **Г.** 4

3 **7.** Обчисліть $16^{\sqrt{3}-1} \cdot 4^{3-2\sqrt{3}}$.
А. 16 **Б.** 4 **В.** $\frac{1}{4}$ **Г.** 1

8. Знайдіть область визначення функції $y = \sqrt{9^x - 3^{x-1}}$.
А. $[-1; +\infty)$ **Б.** $(-1; +\infty)$ **В.** $[1; +\infty)$ **Г.** $(-\infty; +\infty)$

9. Розв'яжіть нерівність $\log_2(x+3) + \log_2 x \leqslant 2$.
А. $(0; 1]$ **Б.** $(0; 1)$ **В.** $[-4; 1]$ **Г.** $[1; +\infty)$

4 **10.** Скільки розв'язків має рівняння $\left(\frac{1}{6}\right)^x = -\frac{6}{x}$?
А. Жодного **Б.** Один
В. Два **Г.** Неможливо визначити

11. Відомо, що $\log_3 2 = a$, $\log_3 5 = b$. Тоді $\log_3 200 = \ldots$
А. $3a - 2b$ **Б.** $2a + 3b$ **В.** $3a + 2b$ **Г.** $3a \cdot 2b$

12. Розв'яжіть рівняння $\log_3(24 + 3^x) = 4 - x$.
А. 1; 3 **Б.** 1; −3 **В.** 3 **Г.** 1

Завдання для перевірки знань до §§ 1–7

1. Порівняйте x і y: 1) $0{,}9^x > 0{,}9^y$; 2) $\log_7 x > \log_7 y$.

2. Розв'яжіть рівняння: 1) $\left(\frac{1}{3}\right)^{x+2} = \frac{1}{27}$; 2) $\log_{\frac{1}{2}} x = -1$.

3. Роз'яжіть нерівність: 1) $3^x > 3^5$; 2) $\left(\frac{1}{2}\right)^x \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^3$.

4. Побудуйте схематично графік функції $y = 0{,}8^x$ і запишіть її властивості.

5. Обчисліть:

1) $\frac{1}{2}\log_3 9 + \frac{1}{4}\log_2 16$; 2) $5^{1+\log_5 3}$;

3) $\log_{15} 3 + \log_{15} 5$; 4) $\log_4 48 - \log_4 3$.

6. Розв'яжіть рівняння:

1) $3^{x+1} - 3^x = 18$; 2) $\log_5(x^2 - 1) = \log_5(2x + 2)$.

7. Обчисліть: 1) $4^{\sqrt{7}-1} \cdot 2^{3-2\sqrt{7}}$; 2) $3^{(1-\sqrt{5})^2} : 3^{4-2\sqrt{5}}$.

8. Розв'яжіть нерівність $\log_3(x+2) + \log_3 x \leqslant 1$.

9. Розв'яжіть рівняння $\log_4(12 + 4^x) = 3 - x$.

Додаткові завдання

10. Знайдіть область визначення функції $y = \sqrt{25^x - 5^{x+4}}$.

11. Відомо, що $\log_5 2 = a$, $\log_5 3 = b$. Виразіть через a і b:

1) $\log_5 6$; 2) $\log_5 10$; 3) $\log_5 18$; 4) $\log_3 2$.

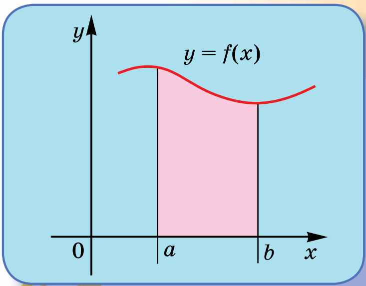
Україна у світі

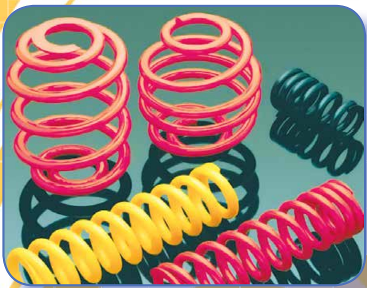
У 2018 році команда українських школярів вдало виступила на 59-й Міжнародній математичній олімпіаді в м. Клуж-Напока (Румунія). Шестеро українських старшокласників (на фото) здобули 4 золоті та 2 срібні медалі.

У загальному рейтингу українська команда посіла 4 місце з понад 100 країн світу, після США, Росії і Китаю. Це найбільше досягнення української команди за усі 26 років її виступів на цих престижних змаганнях. Науковим керівником української команди вже багато років є професор кафедри обчислювальної математики КНУ імені Тараса Шевченка Богдан Владиславович Рубльов.

РОЗДІЛ 2

ІНТЕГРАЛ І ЙОГО ЗАСТОСУВАННЯ





У ЦЬОМУ РОЗДІЛІ ВИ:

- ***ознайомитеся*** з поняттям первісної, невизначеного та визначеного інтегралів;
- ***навчитеся*** знаходити первісні та інтеграли деяких функцій, застосовувати первісні та інтеграли до геометричних і фізичних задач.

§ 8. ПЕРВІСНА ТА ЇЇ ВЛАСТИВОСТІ

Вивчаючи математику в попередніх класах, ви могли помітити, що багато відомих вам операцій мають обернені. Оберненою до додавання є операція віднімання, оберненою до множення (на число, відмінне від нуля) є операція ділення, оберненою до операції множення одночлена на многочлен є операція винесення спільного множника за дужки тощо.

Також існує операція, яка є оберненою до операції взяття похідної від функції – операції диференціювання. Таку операцію називають операцією *інтегрування*.

1. Поняття первісної

Ви вже вмієте знаходити похідну заданої функції $y = f(x)$. Але в математиці часто доводиться розв'язувати обернену задачу: знаходити невідому функцію $f(x)$, якщо відома її похідна $f'(x)$. Так, наприклад, у фізиці, якщо відомо закон руху матеріальної точки $s(t)$, то можна знайти закон зміни швидкості $v(t)$, оскільки $v(t) = s'(t)$. Часто виникає потреба визначити закон руху $s(t)$, маючи $v(t)$, тобто відновити функцію за її похідною, або, як кажуть математики, знайти *первісну для заданої функції*.

Функцію $F(x)$ називають *первісною* для функції $f(x)$ на заданому проміжку, якщо для всіх x із цього проміжку $F'(x) = f(x)$.

Знаходження функції $f(x)$ за її похідною називають операцією *інтегрування* (від лат. *integratio – відновлення*). Ця операція є оберненою до операції диференціювання.

Приклад 1. Для функції $f(x) = 2x$ на проміжку $(-\infty; +\infty)$ первісною є функція $F(x) = x^2$, оскільки для кожного x із цього проміжку виконується рівність $F'(x) = (x^2)' = 2x = f(x)$.

Зауважимо, що, наприклад, функція $x^2 + 1$ має ту саму похідну, що й функція x^2, дійсно $(x^2 + 1)' = 2x$. Тому функція $x^2 + 1$ є також первісною для функції $f(x) = 2x$. Зрозуміло, що замість числа 1 можна підставити будь-яке інше число C, матимемо $(x^2 + C)' = 2x$. Звідси приходимо до висновку: *задача знаходження первісної має безліч розв'язків* у тому випадку, коли хоча б один з розв'язків можна знайти.

Приклад 2. Для функції $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ на її області визначення $(0; +\infty)$ однією з первісних є функція $F(x)=2\sqrt{x}$, оскільки $F'(x)=2(\sqrt{x})'=2\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{x}}=\dfrac{1}{\sqrt{x}}=f(x)$.

2. Основна властивість первісних

У попередньому пункті ми встановили, що задача знаходження первісної має безліч розв'язків. Знайти всі ці розв'язки дає змогу *основна властивість первісної*.

Т Теорема (основна властивість первісної). **Кожна з первісних для функції $f(x)$ на заданому проміжку має вигляд $F(x) + C$, де $F(x)$ – одна із цих первісних, а C – довільна стала.**

Перш ніж довести цю теорему, зауважимо, що в ній коротко сформульовано дві властивості первісної:

1) яке б число не підставили у вираз $F(x) + C$ замість C, отримаємо первісну для $f(x)$ на заданому проміжку;

2) яку б первісну $F_1(x)$ для функції $f(x)$ на заданому проміжку не брали, завжди можна підібрати таке число C, що для всіх x із цього проміжку буде виконуватися рівність $F_1(x) = F(x) + C$.

Доведення теореми і зводиться до доведення цих двох властивостей.

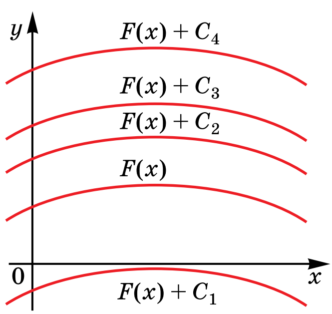
Доведення. 1) За умовою $F(x)$ – одна з первісних для $f(x)$ на заданому проміжку, тобто $F'(x) = f(x)$ для будь-якого x із цього проміжку. Тоді

$$(F(x) + C)' = F'(x) + C' = f(x) + 0 = f(x),$$

тобто $F(x) + C$ – також первісна для $f(x)$ на цьому проміжку.
2) Нехай $F_1(x)$ – інша первісна для функції $f(x)$ на заданому проміжку, тобто $F_1'(x) = f(x)$ для всіх x із цього проміжку. Розглянемо похідну різниці функцій $F_1(x) - F(x)$:

$$(F_1(x) - F(x))' = F_1'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0.$$

Використовуючи ознаку сталості функції, відому вам з попереднього класу, приходимо до висновку, що оскільки похідна різниці функцій $F_1(x) - F(x)$ дорівнює нулю, то ця функція набуває деякого сталого значення C на заданому проміжку. Отже, $F_1(x) - F(x) = C$; $F_1(x) = F(x) + C$. Отже, будь-яка первісна $F_1(x)$ функції $f(x)$ на заданому проміжку може бути записана у вигляді $F_1(x) = F(x) + C$ ■



Мал. 8.1

Приклад 3. Оскільки для функції $f(x) = -3x^2$ на проміжку $(-\infty; +\infty)$ однією з первісних є функція $-x^3$ (дійсно $(-x^3)' = -3x^2 = f(x)$), то загальний вигляд усіх первісних для функції $f(x) = -3x^2$ можна записати у вигляді $F(x) = -x^3 + C$.

Геометрично основна властивість первісної означає, що *графіки будь-яких двох первісних для функції $f(x)$ можна отримати один з одного паралельним перенесенням уздовж осі ординат* (мал. 8.1).

3. Невизначений інтеграл

Сукупність усіх первісних для функції $f(x)$ називають *невизначеним інтегралом* і позначають символом $\int f(x)dx$ (читають: «інтеграл еф від ікс де ікс»).

Тут $f(x)$ – *підінтегральна функція*, x – *змінна інтегрування*.

Таким чином:

$$\int f(x)dx = F(x) + C,$$

де $F(x)$ – одна з первісних, а C – довільна стала.

Приклад 4. Оскільки x^2 – первісна для $2x$, то $\int 2xdx = x^2 + C$.

● Яку функцію називають первісною для функції $y = f(x)$? ● Сформулюйте й доведіть основну властивість первісної. ● Що геометрично означає основна властивість первісної? ● Що називають невизначеним інтегралом?

Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

1

8.1. Які з функцій є первісними для функції $f(x) = -2$:
1) $F(x) = 2x$; 2) $F(x) = -2x$;
3) $F(x) = 0$; 4) $F(x) = -2x + 7$?

8.2. Які з функцій є первісними для функції $f(x) = 3$:
1) $F(x) = 3x$; 2) $F(x) = -3x + 1$;
3) $F(x) = 3x - 2$; 4) $F(x) = 0$?

8.3. Відомо, що $(\cos x)' = -\sin x$. Запишіть деякі три первісні для функції $f(x) = -\sin x$.

8.4. Відомо, що $(\sin x)' = \cos x$. Запишіть деякі три первісні для функції $f(x) = \cos x$.

2

Доведіть, що функція $F(x)$ є первісною для функції $f(x)$ на $(-\infty; +\infty)$ **(8.5–8.6)**:

8.5. 1) $F(x) = x^4 - 3x + 1$, $f(x) = 4x^3 - 3$;
2) $F(x) = x\cos x$, $f(x) = \cos x - x\sin x$.

8.6. 1) $F(x) = x^3 + 2x - 7$, $f(x) = 3x^2 + 2$;
2) $F(x) = x\sin x$, $f(x) = \sin x + x\cos x$.

Доведіть, що функція $F(x)$ є первісною для функції $f(x)$ на заданому проміжку **(8.7–8.8)**:

8.7. 1) $F(x) = \mathrm{ctg}\, x + x^7$, $f(x) = -\dfrac{1}{\sin^2 x} + 7x^6$, $x \in (0; \pi)$;

2) $F(x)=\sqrt{x}-\sin\frac{\pi}{6}$, $f(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$, $x\in(0;+\infty)$.

8.8. 1) $F(x)=x^8+\operatorname{tg}x$, $f(x)=8x^7+\frac{1}{\cos^2 x}$, $x\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$;

2) $F(x)=\cos\frac{\pi}{3}-\sqrt{x}$, $f(x)=-\frac{1}{2\sqrt{x}}$, $x\in(0;+\infty)$.

Чи правильно знайдено невизначений інтеграл **(8.9–8.10)**:

8.9. 1) $\int x^2dx=2x+C$; 2) $\int \sin x dx=-\cos x+C$?

8.10. 1) $\int 5x^4dx=x^5+C$; 2) $\int \cos x dx=-\sin x+C$?

3 Доведіть, що функція $F(x)$ є первісною для функції $f(x)$ на R **(8.11–8.12)**:

8.11. 1) $F(x)=(3x-5)(2x+1)$, $f(x)=12x-7$;

2) $F(x)=(3x+1)^2$, $f(x)=18x+6$.

8.12. 1) $F(x)=(4x-7)(x+1)$, $f(x)=8x-3$;

2) $F(x)=(4x-1)^2$, $f(x)=32x-8$.

Доведіть, що функція $F(x)$ є первісною для функції $f(x)$ на заданому проміжку **(8.13–8.14)**:

8.13. 1) $F(x)=8x^{-2,5}\sqrt{x}$, $f(x)=-\frac{16}{x^3}$, $x\in(0;+\infty)$;

2) $F(x)=\frac{x-2}{x+1}$, $f(x)=\frac{3}{(x+1)^2}$, $x\in(-1;+\infty)$.

8.14. 1) $F(x)=2x^{-1,5}\sqrt{x}$, $f(x)=-\frac{2}{x^2}$, $x\in(0;+\infty)$;

2) $F(x)=\frac{x+3}{x-2}$, $f(x)=-\frac{5}{(x-2)^2}$, $x\in(2;+\infty)$.

Чи є функція $F(x)$ первісною для функції $f(x)$ на заданому проміжку **(8.15–8.16)**:

8.15. 1) $F(x)=2\sin x\cos x$, $f(x)=\cos x$, $x\in(-\infty;+\infty)$;

2) $F(x)=\sqrt{x}(x-2)$, $f(x)=\frac{x-2}{2\sqrt{x}}$, $x\in(0;+\infty)$?

8.16. 1) $F(x)=\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}$, $f(x)=\sin x$, $x\in(-\infty;+\infty)$;

2) $F(x)=\sqrt{x}(x+1)$, $f(x)=\frac{3x+1}{2\sqrt{x}}$, $x\in(0;+\infty)$?

4 **8.17.** Доведіть, що функція $F(x)=x^5|x|$ є первісною для функції $f(x)=6x^4|x|$ на проміжку $(-\infty;+\infty)$.

8.18. Доведіть, що функція $F(x)=3x|x|$ є первісною для функції $f(x)=6|x|$ на проміжку $(-\infty;+\infty)$.

Життєва математика

8.19. Маса вітаміну С, щоденно необхідна людині, відноситься до маси вітаміну Е як 4 : 1. Яка добова потреба у вітаміні С, якщо вітаміну Е людина повинна вживати за день 15 мг?

8.20. Тато планує купити 5 т облицювальної цегли в одного з трьох постачальників. Маса одної цегли 2,5 кг. Ціни і умови доставки подано в таблиці. У скільки гривень обійдеться найдешевший варіант покупки?

Постачальник	Ціна цегли (грн за шт.)	Вартість доставки (грн)	Спеціальні умови
А	5	2000	Немає
Б	5,3	1800	Якщо замовлення на суму понад 10 000 грн, доставка зі знижкою 50 %
В	5,6	1200	Якщо замовлення на суму понад 10 000 грн, доставка безкоштовна

Підготуйтеся до вивчення нового матеріалу

8.21. Заповніть проміжки однією з можливих функцій:

1) $(\ldots)' = 2x$; 2) $(\ldots)' = \cos x$; 3) $(\ldots)' = 0$;
4) $(\ldots)' = 1$; 5) $(\ldots)' = -\sin x$; 6) $(\ldots)' = 3x^2$.

8.22. Знайдіть похідну функції:

1) $f(x) = 4x^7 - \operatorname{tg} x + 5$; 2) $f(x) = x^{-3} + 3\operatorname{ctg} x$;
3) $f(x) = \dfrac{3}{x^7} + 4\cos x - 18x$; 4) $f(x) = 8\sqrt{x} - 5\sin x + x^9$.

Перевірте свою компетентність!

Завдання № 8

1. Поле, площа якого 24 га, зорали дві бригади. Перша зорала $\frac{2}{3}$ поля. Скільки гектарів зорала друга бригада?

А	Б	В	Г	Д
6	8	10	12	16

2. Якому з наведених проміжків належить корінь рівняння $4^{2x-3} = 16$?

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty;\ 0)$	$[0;\ 1]$	$(1;\ 2]$	$(2;\ 3]$	$(3;\ +\infty)$

3. Знайдіть найбільший від'ємний член арифметичної прогресії 4,9; 4,5; 4,1; ...

А	Б	В	Г	Д
–0,5	–0,4	–0,3	–0,2	–0,1

4. Обчисліть $\log_9 27$.

А	Б	В	Г	Д
3	2	1,5	1	неможливо знайти

5. Розв'яжіть нерівність $\frac{1}{x} \leqslant \frac{1}{5}$.

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty;\ 0]\cup[5;\ +\infty)$	$(0;\ 5)$	$(0;\ 5]$	$[5;\ +\infty)$	$(-\infty;\ 0)\cup[5;\ +\infty)$

6. Подайте вираз $\frac{b}{\sqrt[6]{b}}$ у вигляді степеня з основою b.

А	Б	В	Г	Д
$b^{-\frac{5}{6}}$	b^6	$b^{\frac{1}{6}}$	$b^{\frac{5}{6}}$	$b^{-\frac{1}{6}}$

7. Установіть відповідність між квадратичною функцією (1–4) та нулями цієї функції (А–Д).

Квадратична функція

1 $y = 2x^2 + 3x - 5$
2 $y = x^2 + 2x - 3$
3 $y = 2x^2 - 3x - 5$
4 $y = x^2 - 2x - 3$

Нулі функції

А $-1;\ 2,5$
Б $-1;\ 3$
В $1;\ -3$
Г $1;\ -2,5$
Д $1;\ 3$

	А	Б	В	Г	Д
1					
2					
3					
4					

8. Обчисліть $\operatorname{tg}75° + \operatorname{ctg}75°$.

9. Знайдіть значення похідної функції $f(x) = \frac{x^2+1}{x-3} + \sqrt{x}$ у точці $x_0 = 4$.

§ 9. ТАБЛИЦЯ ПЕРВІСНИХ. ПРАВИЛА ЗНАХОДЖЕННЯ ПЕРВІСНИХ

У попередньому параграфі ви навчилися перевіряти чи є одна функція первісною для іншої. У цьому параграфі навчимося знаходити первісні (невизначені інтеграли) для деяких функцій.

1. Таблиця первісних (невизначених інтегралів)

У попередньому класі було складено таблицю похідних. У подальшому корисною буде *таблиця первісних* (*невизначених інтегралів*) для деяких функцій, яка ґрунтується на таблиці похідних.

Функція $f(x)$	Загальний вигляд первісних $F(x) + C$, де C – довільна стала	Відповідний запис за допомогою невизначеного інтеграла
0	C	$\int 0dx = C$
1	$x + C$	$\int dx = x + C$
x^α, $\alpha \neq -1$, $\alpha \in Z$	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C$	$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x} + C$	$\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + C$
$\sin x$	$-\cos x + C$	$\int \sin x dx = -\cos x + C$
$\cos x$	$\sin x + C$	$\int \cos x dx = \sin x + C$
$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\mathrm{tg}\, x + C$	$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \mathrm{tg}\, x + C$
$\frac{1}{\sin^2 x}$	$-\mathrm{ctg}\, x + C$	$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\mathrm{ctg}\, x + C$

Для обґрунтування цих формул достатньо перевірити, що похідна від первісної другого стовпчика дорівнює функції, заданій у першому стовпчику.

Перевіримо, наприклад, правильність знаходження первісних для функції x^α, $\alpha \neq -1$, $\alpha \in Z$:

$$\left(\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C\right)' = \frac{1}{\alpha+1}(x^{\alpha+1})' + C' = \frac{1}{\alpha+1}(\alpha+1)x^{\alpha+1-1} + 0 = x^\alpha.$$

Отже, загальний вигляд первісних для функції x^α має вигляд

$$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C.$$

Задача 1. Знайти всі первісні для функції:

1) $f(x) = x^7$; 2) $f(x) = \frac{1}{x^5}$.

Розв'язання. Використаємо той факт, що загальний вигляд первісних для функції x^α такий: $\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C$.

1) $F(x)=\frac{x^{7+1}}{7+1}+C$; $F(x)=\frac{x^8}{8}+C$.

2) Оскільки $f(x) = x^{-5}$, то $F(x)=\frac{x^{-5+1}}{-5+1}+C$; $F(x)=\frac{x^{-4}}{-4}+C$; $F(x)=-\frac{1}{4x^4}+C$.

Відповідь. 1) $\frac{x^8}{8}+C$; 2) $-\frac{1}{4x^4}+C$.

Іноді, щоб знайти первісну (невизначений інтеграл) для деякої функції, її попередньо треба спростити.

Задача 2. Знайти невизначений інтеграл

$$\int\left(\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}\right)dx.$$

Розв'язання. Оскільки $\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}=\cos\left(2\cdot\frac{x}{2}\right)=\cos x$, то маємо $\int\left(\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}\right)dx=\int\cos x\,dx=\sin x+C$.

Відповідь. $\sin x + C$.

Часто в задачах потрібно знайти первісну, що відповідає певним умовам, наприклад, графік якої проходить через певну точку.

Задача 3. Для функції $f(x) = \sin x$ знайти первісну, графік якої проходить через точку $A\left(\frac{\pi}{3};\frac{1}{2}\right)$.

Розв'язання. 1) Для функції $f(x) = \sin x$ знаходимо загальний вигляд первісних: $F(x) = -\cos x + C$.

2) За умовою графік шуканої первісної проходить через точку $A\left(\frac{\pi}{3};\frac{1}{2}\right)$. Тому, підставляючи в загальний вигляд первісних $\frac{\pi}{3}$ замість x, а $\frac{1}{2}$ замість $F(x)$, маємо: $\frac{1}{2}=-\cos\frac{\pi}{3}+C$; $\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}+C$; $C=1$. Отже, шукана первісна $F_1(x) = -\cos x + 1$.

Відповідь. $-\cos x + 1$.

2. Правила знаходження первісних (правила інтегрування)

У попередньому пункті було розглянуто питання знаходження первісних (невизначених інтегралів) для деяких функцій, а чи можна знайти первісні для функцій $f(x) = x^2 + \sin x$, $f(x) = 3x^5$, $f(x) = \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$ тощо? Відповідь на це запитання позитивна. Знаходячи первісні для вищенаведених функцій і для багатьох інших, знадобиться не лише таблиця первісних (невизначених інтегралів), а й *правила знаходження первісних* (*правила інтегрування*). Ці правила подібні до правил диференціювання.

Правило 1. **Якщо $F(x)$ – первісна для $f(x)$, а $G(x)$ – первісна для $g(x)$, то $F(x) + G(x)$ – первісна для $f(x) + g(x)$.**

Доведення. Оскільки $F(x)$ – первісна для $f(x)$, а $G(x)$ – первісна для $g(x)$, то $(F(x) + G(x))' = F'(x) + G'(x) = f(x) + g(x)$. Тобто $F(x) + G(x)$ є первісною для $f(x) + g(x)$. ■

Використовуючи невизначений інтеграл, правило 1 можна записати так:

$$\int (f(x) + g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx,$$ тобто

інтеграл від суми функцій дорівнює сумі інтегралів від цих функцій.

Правило 2. **Якщо $F(x)$ – первісна для $f(x)$, а k – стала, то $kF(x)$ – первісна для $kf(x)$.**

Доведення. Ураховуючи, що сталий множник можна винести за знак похідної, маємо:

$(kF(x))' = kF'(x) = kf(x)$, тому $kF(x)$ – первісна для $kf(x)$. ■

За допомогою невизначеного інтеграла правило 2 можна записати так:

$$\int kf(x)dx = k\int f(x)dx,$$ **де k – стала,**

тобто сталий множник можна виносити за знак невизначеного інтеграла.

Перш ніж розглянути третє правило інтегрування, повернемося до поняття похідної та розглянемо похідну функції вигляду $y = f(kx + b)$, де $k \neq 0$.

Такими функціями є, наприклад, функції $y = (x-7)^5$, $y = \sin\left(4x + \frac{\pi}{8}\right)$, $y = \sqrt{0,5x + 11}$ тощо. Ви вже вмієте знаходити похідні функцій $y = x^5$, $y = \sin x$, $y = \sqrt{x}$. Чи допоможуть ці знання для знаходження похідних вищенаведених функцій?

Т Теорема (про похідну функції $y = f(kx + b)$). **Похідна функції $y = f(kx + b)$ обчислюється за формулою:**

$$(f(kx + b))' = kf'(kx + b).$$

Доведення цієї теореми є досить громіздким, тому його не наводимо.

Приклад 1. 1) $y = (x - 7)^5$; $y' = 1 \cdot 5 \cdot (x - 7)^{5-1} = 5(x - 7)^4$.

2) $y = \sin\left(4x + \frac{\pi}{8}\right)$; $y' = 4\cos\left(4x + \frac{\pi}{8}\right)$.

3) $y = \sqrt{0,5x + 11}$; $y' = 0,5 \cdot \frac{1}{2\sqrt{0,5x + 11}} = \frac{1}{4\sqrt{0,5x + 11}}$.

4) $y = \frac{1}{(3x - 2)^5}$; $y = (3x - 2)^{-5}$. Отже,

$$y' = 3 \cdot (-5) \cdot (3x - 2)^{-5-1} = -\frac{15}{(3x - 2)^6}.$$

Тепер можна розглянути ще одне важливе правило інтегрування.

! Правило 3. **Якщо $F(x)$ — первісна для $f(x)$, а k і b — деякі сталі, причому $k \neq 0$, тоді $\frac{1}{k}F(kx + b)$ — первісна для функції $f(kx + b)$.**

Доведення. Ураховуючи вищенаведену теорему про похідну функції $y = f(kx + b)$ та $F'(x) = f(x)$, маємо:

$$\left(\frac{1}{k}F(kx + b)\right)' = \frac{1}{k}(F(kx + b))' = \frac{1}{k} \cdot k \cdot F'(kx + b) = f(kx + b),$$

тому $\frac{1}{k}F(kx + b)$ — первісна для функції $f(kx + b)$. ■

Використовуючи невизначений інтеграл, правило 3 можна подати так:

!

$$\int f(kx + b)dx = \frac{1}{k}F(kx + b) + C.$$

Розглянемо приклади застосування цих правил.

Задача 4. Знайти загальний вигляд первісних для функції:

1) $f(x) = x^3 + \frac{1}{\cos^2 x}$; 2) $f(x) = 5\sin x$.

Розв'язання. 1) Оскільки $\frac{x^4}{4}$ – первісна для x^3, а $\operatorname{tg}x$ – первісна для $\frac{1}{\cos^2 x}$, то, використовуючи правило 1, матимемо загальний вигляд первісних для заданої функції

$$F(x) = \frac{x^4}{4} + \operatorname{tg}x + C.$$

2) Оскільки $-\cos x$ – первісна для $\sin x$, то, використовуючи правило 2, матимемо загальний вигляд первісних для заданої функції $F(x) = -5\cos x + C$.

Відповідь. 1) $\frac{x^4}{4} + \operatorname{tg}x + C$; 2) $-5\cos x + C$.

Задача 5. Знайти невизначений інтеграл

$$\int\left(4x^3 - \frac{2}{\sin^2 x}\right)dx.$$

Розв'язання. Використовуючи правила 1 і 2, матимемо:

$$\int\left(4x^3 - \frac{2}{\sin^2 x}\right)dx = \int 4x^3dx - \int\frac{2}{\sin^2 x}dx = 4\int x^3dx - 2\int\frac{dx}{\sin^2 x} =$$

$$= 4\cdot\frac{x^4}{4} - 2\cdot(-\operatorname{ctg} x) + C = x^4 + 2\operatorname{ctg} x + C.$$

Відповідь. $x^4 + 2\operatorname{ctg}x + C$.

Задача 6. Знайти загальний вигляд первісних для функції

$$f(x) = \cos\left(2x - \frac{\pi}{8}\right).$$

Розв'язання. Для $\cos x$ однією з первісних є $\sin x$. Використовуючи правило 3, матимемо загальний вигляд первісних для заданої функції $F(x) = \frac{1}{2}\sin\left(2x - \frac{\pi}{8}\right) + C$.

Відповідь. $\frac{1}{2}\sin\left(2x - \frac{\pi}{8}\right) + C$.

Задача 7. Для функції $f(x) = \left(\frac{1}{9}x - 1\right)^8$ знайти первісну $F(x)$ таку, що $F(18) = 3$.

Розв'язання. 1) Використовуючи правило 3 і той факт, що однією з первісних для функції x^8 є $\frac{x^9}{9}$, матимемо:

$$F(x)=\frac{1}{\frac{1}{9}}\cdot\frac{\left(\frac{1}{9}x-1\right)^9}{9}+C;\ F(x)=\left(\frac{1}{9}x-1\right)^9+C.$$

2) Оскільки $F(18) = 3$, то $3=\left(\frac{1}{9}\cdot 18-1\right)^9+C$; $3 = 1^9 + C$; $C = 2$.

Отже, $F(x)=\left(\frac{1}{9}x-1\right)^9+2$.

Відповідь. $\left(\frac{1}{9}x-1\right)^9+2$.

3. Застосування первісних у фізиці

Якщо в задачі відомо закон прямолінійного руху тіла $s = s(t)$, то, щоб отримати його швидкість у момент часу t, потрібно знайти похідну: $v(t) = s'(t)$. Важливою є також обернена задача: за даною в кожний момент швидкістю визначити закон руху. Зрозуміло, що $s(t)$ є первісною для функції $v(t)$.

Аналогічно, оскільки прискорення $a(t) = v'(t)$, то $v(t)$ – первісна для функції $a(t)$. Таким чином можна відновити закон руху за заданою швидкістю, закон швидкості за заданим прискоренням.

Задача 8. Точка рухається по прямій з прискоренням $a(t) = -2t$ (м/с^2). Знайти швидкість точки $v(t)$ як функцію від часу, якщо в момент часу $t = 4$ с швидкість точки була 10 м/с.

Розв'язання. 1) $v(t)$ – первісна для $a(t)$. Маємо:

$$v(t)=-2\cdot\frac{t^2}{2}+C;\ v(t) = -t^2 + C.$$

2) Оскільки при $t = 4$ маємо $v = 10$, то $10 = -4^2 + C$; $C = 26$. Отже, шуканий закон швидкості $v(t) = 26 - t^2$.

Відповідь. $v(t) = 26 - t^2$.

Задача 9. Швидкість руху матеріальної точки, що рухається по прямій, задається рівнянням $v(t)=1+\frac{1}{2}t$ (м/с). У момент часу $t = 2$ с точка знаходиться на відстані $s = 7$ м від початку координат. На якій відстані від початку координат буде знаходитися точка в момент часу $t = 10$ с?

Розв'язання. 1) Оскільки $s(t)$ – первісна для $v(t)$, то

$$s(t)=t+\frac{1}{2}\cdot\frac{t^2}{2}+C;\ s(t)=t+\frac{t^2}{4}+C.$$

2) $s(2) = 7$, тому $7 = 2 + \frac{2^2}{4} + C$; $C = 4$.

Отже, $s(t) = t + \frac{t^2}{4} + 4$ – закон руху тіла.

3) У момент часу $t = 10$ с маємо $s(10) = 10 + \frac{10^2}{4} + 4 = 39$ (м).

Відповідь. 39 м.

● Вивчіть таблицю первісних (невизначених інтегралів). ● Сформулюйте й доведіть три правила знаходження первісних (правила інтегрування).

Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

1 Знайдіть загальний вигляд первісних для функції **(9.1–9.2)**:

9.1. 1) $f(x) = 1$; 2) $f(x) = x^7$;
3) $f(x) = x^{-6}$; 4) $f(x) = \cos x$.

9.2. 1) $f(x) = 0$; 2) $f(x) = x^{10}$;
3) $f(x) = x^{-4}$; 4) $f(x) = \sin x$.

Знайдіть невизначений інтеграл **(9.3–9.4)**:

9.3. 1) $\int x^{-3}dx$; 2) $\int \frac{dx}{\sin^2 x}$.

9.4. 1) $\int x^{-5}dx$; 2) $\int \frac{dx}{\cos^2 x}$.

2 **9.5.** Знайдіть три різні первісні для функції:

1) $f(x) = x^5$; 2) $f(x) = \frac{1}{x^8}$.

9.6. Знайдіть дві різні первісні для функції:

1) $f(x) = x^{19}$; 2) $f(x) = \frac{1}{x^6}$.

Знайдіть загальний вигляд первісних для функції **(9.7–9.10)**:

9.7. 1) $f(x) = 10x^9$; 2) $f(x) = \frac{5}{\cos^2 x}$;
3) $f(x) = 14x^6$; 4) $f(x) = 6x^{-3}$.

9.8. 1) $f(x) = \frac{3}{\sin^2 x}$; 2) $f(x) = 4x^3$;
3) $f(x) = 27x^8$; 4) $f(x) = 12x^{-7}$.

9.9. 1) $f(x) = 4 - x$; 2) $f(x) = 3x^2 + 2x - 1$;
3) $f(x) = 10x^4 + 16x^7$; 4) $f(x) = x^3 - \frac{2}{\sqrt{x}}$.

9.10. 1) $f(x) = x + 2$; 2) $f(x) = 4x^3 - 2x + 1$;

3) $f(x) = 18x^2 - 22x^{10}$; 4) $f(x) = x^5 + \frac{2}{\sqrt{x}}$.

Знайдіть невизначений інтеграл **(9.11–9.12):**

9.11. 1) $\int\left(2 + \frac{1}{x^3}\right)dx$; 2) $\int(3\sin x - 4\cos x)dx$.

9.12. 1) $\int\left(\frac{1}{x^4} - 3\right)dx$; 2) $\int(2\cos x + 5\sin x)dx$.

Для функції $f(x)$ знайдіть первісну $F(x)$, що набуває заданого значення в заданій точці **(9.13–9.14):**

9.13. 1) $f(x) = 5x^4$, $F(-1) = 2$; 2) $f(x) = \sin x$, $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 3$.

9.14. 1) $f(x) = 3x^2$, $F(-1) = 3$; 2) $f(x) = \cos x$, $F(\pi) = -1$.

9.15. Для заданої функції $f(x)$ знайдіть первісну, графік якої проходить через точку M:

1) $f(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$, $M\left(\frac{3\pi}{4}; -2\right)$; 2) $f(x) = \frac{1}{x^5}$, $M(1; 0)$.

9.16. Для заданої функції $f(x)$ знайдіть первісну, графік якої проходить через точку N:

1) $f(x) = \frac{1}{\sin^2 x}$, $N\left(\frac{3\pi}{4}; -3\right)$; 2) $f(x) = \frac{1}{x^2}$; $N(1; -6)$.

3 **9.17.** Для заданої функції $f(x)$ знайдіть первісну, графік якої проходить через точку A:

1) $f(x) = 9x^2 - 2x$, $A(2; -2)$;

2) $f(x) = 3 + \frac{4}{\sqrt{x}}$, $A(1; 0)$.

9.18. Для заданої функції $f(x)$ знайдіть первісну, графік якої проходить через точку B:

1) $f(x) = 4x^3 + 6x$, $B(-1; 2)$;

2) $f(x) = \frac{2}{\sqrt{x}} - 5$, $B(1; -1)$.

Для функції $f(x)$ знайдіть загальний вигляд первісних $F(x)$ **(9.19–9.20):**

9.19. 1) $f(x) = (3x - 2)^6$; 2) $f(x) = \cos\left(\frac{x}{3} - \frac{\pi}{9}\right)$;

3) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{4x + 7}}$; 4) $f(x) = \frac{6}{\sin^2 3x}$.

9.20. 1) $f(x) = (4x + 1)^5$; 2) $f(x) = \sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{8}\right)$;

3) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2x-3}}$; 4) $f(x) = \frac{8}{\cos^2 2x}$.

9.21. Для функції $f(x)$ знайдіть первісну, графік якої проходить через точку C:

1) $f(x) = \sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$, $C\left(\frac{\pi}{12};\ 1{,}5\right)$;

2) $f(x) = \frac{8}{(4x-3)^2}$, $C(1;\ -5)$.

9.22. Для функції $f(x)$ знайдіть первісну, графік якої проходить через точку D:

1) $f(x) = \cos\left(4x - \frac{\pi}{12}\right)$, $D\left(\frac{\pi}{16};\ \frac{1}{8}\right)$;

2) $f(x) = \frac{6}{(2x+1)^2}$, $D(-1;\ 5)$.

9.23. Швидкість руху матеріальної точки задано рівнянням $v(t) = 3 + 2t$ (м/с). Знайдіть рівняння руху $s = s(t)$, якщо в момент часу $t = 5$ с координата точки дорівнює 20 м.

9.24. Прискорення матеріальної точки задано рівнянням $a(t) = 7 - 2t$ (м/с^2). Знайдіть рівняння швидкості матеріальної точки $v = v(t)$, якщо в момент часу $t = 2$ с швидкість точки дорівнює 9 м/с.

4 **9.25.** Для функції $f(x) = \frac{1}{\sqrt{4x-1}} + \frac{4}{\sin^2\frac{x}{2}}$ знайдіть загальний вигляд первісних.

9.26. Для функції $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2x+3}} - \frac{3}{\cos^2\frac{x}{4}}$ знайдіть загальний вигляд первісних.

Знайдіть загальний вигляд первісних для функції $f(x)$, попередньо спростивши її **(9.27–9.28)**:

9.27. 1) $f(x) = \sin x \cos x$; 2) $f(x) = \cos 5x \cos\frac{\pi}{8} - \sin 5x \sin\frac{\pi}{8}$;

3) $f(x) = (x^3 - 2x)^2$; 4) $f(x) = \frac{x^5 - 3x^2 + 2}{x^2}$.

9.28. 1) $f(x) = \cos^2\frac{x}{8} - \sin^2\frac{x}{8}$;

2) $f(x) = \sin 3x \cos\dfrac{\pi}{12} - \cos 3x \sin\dfrac{\pi}{12}$;

3) $f(x) = (x^2 - x)^2$; 4) $f(x) = \dfrac{x^7 - 5x}{x}$.

9.29. Знайдіть первісну функції $f(x) = 3x^2 - 6x + 8$, один з нулів якої дорівнює 1.

9.30. Знайдіть первісну функції $f(x) = 4x^3 - 2x + 3$, один з нулів якої дорівнює -1.

9.31. Матеріальна точка рухається по прямій з прискоренням $a(t) = 5 - 4t$ (м/с²). У момент часу $t = 3$ с швидкість точки становить 7 м/с. Якою буде швидкість матеріальної точки в момент часу $t = 5$ с?

9.32. Швидкість руху матеріальної точки, що рухається по прямій, задано рівнянням $v(t) = 6t + 18$ (м/с). У момент часу $t = 1$ с точка знаходиться на відстані 2 м від початку координат. На якій відстані від початку координат буде знаходитися точка в момент часу $t = 3$ с?

Життєва математика

9.33. Початковий вклад становить 10 000 грн, за два роки він збільшився до 13 456 грн. Якою є відсоткова ставка, якщо відсотки нараховуються один раз на рік на поточний рахунок?

9.34. Лікарка пані Наталя веде здоровий спосіб життя. Ранком вона їде на велосипеді на роботу зі швидкістю 15 км/год та доїжджає до роботи за 20 хв. Увечері вона повертається з роботи зі швидкістю 12 км/год. За який час пані Наталя повертається додому?

Перевірте свою компетентність!

Завдання № 9

1. Обчисліть $0{,}7 : \dfrac{7}{8}$.

А	Б	В	Г	Д
$\dfrac{49}{80}$	$\dfrac{5}{4}$	$\dfrac{4}{5}$	$\dfrac{1}{80}$	$\dfrac{1}{10}$

2. Скільки натуральних розв'язків має нерівність $8 - 3x > 2$?

А	Б	В	Г	Д
жодного	один	два	чотири	безліч

3. Знайдіть суму перших семи членів геометричної прогресії 8; –4; 2; …

А	Б	В	Г	Д
$5\frac{5}{16}$	$5\frac{7}{8}$	$5\frac{3}{8}$	$5\frac{1}{4}$	$5\frac{5}{8}$

4. Розставте числа $a = \sin 90°$, $b = \sin 89°$, $c = \sin 107°$ в порядку зростання.

А	Б	В	Г	Д
a, b, c	a, c, b	b, a, c	c, a, b	c, b, a

5. Знайдіть значення похідної функції $f(x) = 2\cos x - 3$ у точці $x_0 = \frac{\pi}{2}$.

А	Б	В	Г	Д
–5	–1	2	–2	інша відповідь

6. Якому з наведених проміжків належить число $\sqrt[5]{33}$?

А	Б	В	Г	Д
(0; 1)	(1; 2)	(2; 3)	(3; 4)	$(4; +\infty)$

7. Установіть відповідність між нерівністю (1–4) та множиною її розв'язків (А–Д).

Нерівність

1 $(x + 1)(x - 5) \leqslant 0$

2 $\log_5 x \leqslant 1$

3 $|x - 2| < 3$

4 $3x - 10 < x$

Множина розв'язків

А $(-\infty; 5)$

Б $(-1; 5)$

В $[-1; 5]$

Г $(0; 5]$

Д $[0; 5]$

	А	Б	В	Г	Д
1					
2					
3					
4					

8. Знайдіть значення виразу

$$\frac{m+2}{m^2-2m+1} \cdot \frac{5m-5}{m^2-4} - \frac{5}{m-2}, \text{ якщо } m = 1{,}2.$$

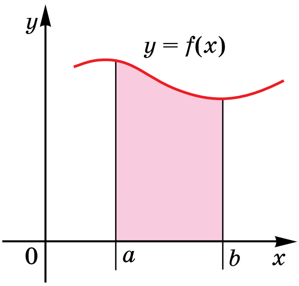
9. Обчисліть $5^{\frac{2}{\log_3 5}} - \log_2 \sqrt[4]{2}$.

§ 10. ВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ, ЙОГО ФІЗИЧНИЙ І ГЕОМЕТРИЧНИЙ ЗМІСТ

У цьому параграфі ознайомимося з одним з найважливіших понять математичного аналізу – поняттям визначеного інтеграла.

1. Приклади задач, що приводять до поняття визначеного інтеграла

Розглянемо задачі, які приводять до поняття визначеного інтеграла.



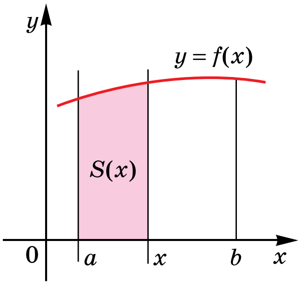
Мал. 10.1

Задача 1 (*про площу криволінійної трапеції*). Нехай на проміжку $[a; b]$ осі абсцис задано неперервну функцію $y = f(x)$, яка на цьому проміжку набуває лише невід'ємних значень. Фігуру, обмежену графіком такої функції $y = f(x)$, віссю абсцис і прямими $x = a$, $x = b$, називають *криволінійною трапецією* (мал. 10.1).

Кожна криволінійна трапеція має певну площу. Доведемо теорему, яка показує, що площу криволінійної трапеції можна знаходити за допомогою первісних.

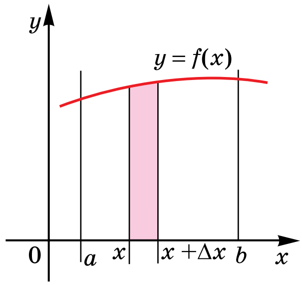
Т Теорема (про площу криволінійної трапеції). **Нехай $y = f(x)$ – функція неперервна на проміжку $[a; b]$, яка на цьому проміжку набуває лише невід'ємних значень, а $F(x)$ – первісна цієї функції на цьому проміжку. Тоді площу S криволінійної трапеції, обмеженої графіком функції $y = f(x)$, віссю абсцис і прямими $x = a$ і $x = b$, обчислюють за формулою:**

$$S = F(b) - F(a).$$

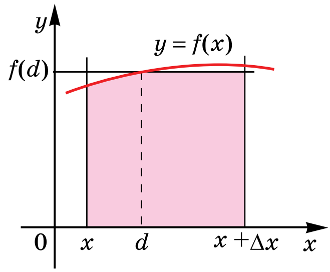


Мал. 10.2

Доведення (не для запам'ятовування). Нехай x – довільна точка проміжку $[a; b]$. Позначимо через $S(x)$ площу криволінійної трапеції, обмеженої графіком функції $y = f(x)$, віссю абсцис, прямою $x = a$ та прямою, що проходить через точку $(x; 0)$ перпендикулярно до осі абсцис (мал. 10.2). Зрозуміло, що $S(x)$ – функція від x. Доведемо, що $S'(x) = f(x)$ для кожного $x \in [a; b]$.



Мал. 10.3



Мал. 10.4

Для цього достатньо довести (за означенням похідної), що $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta S}{\Delta x} = f(x)$. Для спрощення розглянемо випадок, коли $\Delta x > 0$ (випадок $\Delta x < 0$ розглядається аналогічно).

$\Delta S = S(x + \Delta x) - S(x)$, тому ΔS – площа фігури, заштрихованої на малюнку 10.3. Візьмемо тепер прямокутник такої самої площі ΔS, у якого одна із сторін дорівнює відрізку з кінцями в точках $(x; 0)$ і $(x + \Delta x; 0)$. Такий прямокутник зображено на малюнку 10.4. Оскільки функція $y = f(x)$ неперервна, то висота цього прямокутника дорівнює $f(d)$, де d – деяке число з проміжку $[x; x + \Delta x]$. Тому $\Delta S = f(d) \cdot \Delta x$, звідки $\dfrac{\Delta S}{\Delta x} = f(d)$.

Якщо $\Delta x \to 0$, то $d \to x$ і $f(d) \to f(x)$, оскільки $y = f(x)$ – неперервна функція. Отже, $\dfrac{\Delta S}{\Delta x} \to f(x)$ при $\Delta x \to 0$, тобто $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta S}{\Delta x} = f(x)$. А це означає, що $S'(x) = f(x)$, тобто $S(x)$ – первісна для функції $f(x)$.

За основною властивістю первісної для всіх $x \in [a; b]$ маємо $S(x) = F(x) + C$, $F(x)$ – одна з первісних для функції $y = f(x)$, а C – довільна стала. Для знаходження C підставимо $x = a$. Очевидно, що $S(a) = 0$. Тоді

$$0 = F(a) + C; \; C = -F(a).$$

Отже, $S(x) = F(x) - F(a)$. Ураховуючи те, що шукана площа криволінійної трапеції дорівнює $S(b)$, підставляємо $x = b$ в останню формулу та маємо

$$S = S(b) = F(b) - F(a).$$ ■

Різницю $F(b) - F(a)$ називають *визначеним інтегралом* функції $f(x)$ на проміжку $[a; b]$ і позначають $\int\limits_a^b f(x)dx$ (читають: «інтеграл від a до b еф від ікс де ікс»).

Під час обчислення різниці $F(b) - F(a)$ можна брати будь-яку з первісних для функції $f(x)$, які в загальному вигляді записують $F(x) + C$. Але $(F(b) + C) - (F(a) + C) = F(b) - F(a)$. Тому прийнято застосовувати ту первісну, для якої $C = 0$.

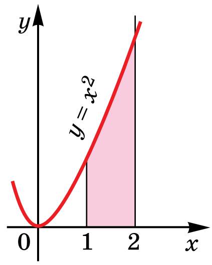
Зауважимо, що в математиці існує також означення визначеного інтеграла через інтегральні суми. Однак у цьому підручнику ми його не будемо розглядати.

Задача 2. Обчислити площу S криволінійної трапеції, обмеженої графіком функції $f(x) = x^2$ та прямими $y = 0$, $x = 1$, $x = 2$.

Розв'язання. Для функції $f(x) = x^2$ одніею з первісних є функція $F(x) = \frac{x^3}{3}$ (мал. 10.5). Тоді шукана площа

$$S = F(2) - F(1) = \frac{2^3}{3} - \frac{1^3}{3} = \frac{7}{3}.$$

Відповідь. $\frac{7}{3}$.



Мал. 10.5

Задача 3 (*про визначення шляху точки*). Нехай відомо швидкість точки, що рухається прямолінійно в кожний момент часу $[a; b]$, як функція від t: $v = v(t)$. Виберемо на прямій, по якій рухається точка, систему координат і позначимо через $s(t)$ координату точки в момент часу t. Тоді шлях, пройдений точкою за інтервал часу $[a; b]$, буде дорівнювати $s(b) - s(a)$. Оскільки швидкість є похідною від координати за часом, тобто $v(t) = s'(t)$, то $s(t)$ – первісна для функції $v(t)$.

Таким чином, шлях, пройдений точкою, що рухається прямолінійно зі швидкістю $v = v(t)$ за інтервал часу $[a; b]$, зводиться до знаходження різниці $s(b) - s(a)$, де $s(t)$ – первісна для $v(t)$, тобто інтеграла $\int_a^b v(t)dt$.

Задача 4. Матеріальна точка рухається прямолінійно зі швидкістю $v(t) = 3t^2 + 1$ (м/с). Який шлях пройде матеріальна точка за перші 2 с після початку відліку часу?

Розв'язання. Маємо $s(t) = t^3 + t$ – один з можливих законів руху матеріальної точки. Тоді шуканий шлях

$$s = s(2) - s(0) = (2^3 + 2) - (0^3 + 0) = 10 \text{ (м)}.$$

Відповідь. 10 м.

2. Геометричний і фізичний зміст визначеного інтеграла

Ураховуючи попередній пункт, можна визначити геометричний і фізичний зміст визначеного інтеграла.

Геометричний зміст визначеного інтеграла полягає в такому:

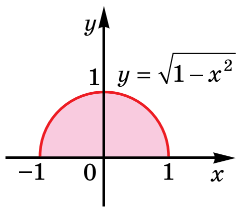
інтеграл $\int_a^b f(x)dx$ від функції $y = f(x)$, яка неперервна на проміжку $[a; b]$ і набуває на цьому проміжку лише невід'ємних значень, є площею криволінійної трапеції, обмеженої графіком цієї функції та прямими $y = 0$, $x = a$ і $x = b$.

Геометричний зміст інтеграла можна використовувати під час знаходження визначених інтегралів у тому разі, коли первісну функції $y = f(x)$ знайти важко або неможливо, а площу фігури знайти легко за допомогою геометричних міркувань.

Задача 5. Використавши геометричний зміст інтеграла, обчислити $\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\,dx$.

Розв'язання. Шуканий інтеграл дорівнює площі криволінійної трапеції, обмеженої лініями $y=\sqrt{1-x^2}$ і $y = 0$ (мал. 10.6), тобто половині площі круга радіуса 1. Тому

$$\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{\pi\cdot 1^2}{2} = \frac{\pi}{2}.$$



Мал. 10.6

Відповідь. $\frac{\pi}{2}$.

Фізичний зміст визначеного інтеграла полягає в такому:

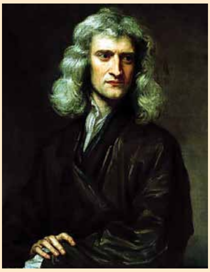
інтеграл $\int_a^b v(t)dt$ є переміщенням за інтервал часу $[a; b]$ матеріальної точки, що рухається прямолінійно зі швидкістю $v = v(t)$.

А ще раніше...

Серед учених, які зробили значний внесок у розвиток інтегрального числення, у першу чергу, потрібно відзначити Г. В. Лейбніца та І. Ньютона.

Німецький філософ, логік, математик, механік, фізик, юрист, історик, дипломат, винахідник і мовознавець Г. В. Лейбніц у 1686 р. опублікував роботу «Про приховану геометрію...», яка є першою друкарською роботою з інтегрального числення. Основним поняттям для Лейбніца була сума всіх нескінченно малих трикутників ydx, на які розбивається криволінійна фігура, тобто визначений інтеграл. У цій самій роботі вперше з'явився не лише знак $\int$, але й запис $\int ydx$, причому Лейбніц попереджував, що не слід забувати писати під знаком інтеграла множник dx. Символ $\int$ являє собою наче видовжену літеру S (від лат. Summa – сума), а ydx нагадує структуру доданків суми. Однак сам термін «інтеграл» (від лат. Integer – цілий, тобто ціла, уся – площа) був запропонований у 1696 р. Йоганном Бернуллі й схвалений, хоча й неохоче, Лейбніцом, який до цього користувався словосполученнням «сума всіх ydx». Також у вищезгаданій роботі Лейбніц установлює зв'язок між диференціальним та інтегральним численням. Учений, виходячи з поняття визначеного інтеграла, приходить до поняття первісної $F(x)$ для цієї функції $f(x)$ так, що

Г.В. Лейбніц
(1646–1716)



І. Ньютон
(1643–1727)

$$F'(x) = f(x) \text{ або } dF(x) = f(x)dx,$$

і робить висновок що, диференціювання та інтегрування є взаємно оберненими операціями, на зразок додавання та віднімання, множення та ділення і т. д.

Інший видатний учений, англійський фізик, математик, механік та астроном, І. Ньютон у 1671 р. опублікував роботу «Метод флюксій» (нагадаємо, що функцію Ньютон називав «флюентою», а похідну – «флюксією»). У цій роботі Ньютон формулює дві задачі: «За заданим співвідношенням між флюентами визначити співвідношення між флюксіями» і «За заданим рівнянням, що містить флюксії, знайти співвідношення між флюентами». Розв'язання першої задачі приводить Ньютона до обчислення флюксії (похідної) від так званої флюенти (функції) і обґрунтування розвиненого ним диференціального числення. Розв'язання другої задачі містить, зокрема, знаходження функції F (первісної) за її похідною $F' = f$. Саме ця задача приводить до поняття невизначеного інтеграла. Однак термін «первісна» функція ввів на початку XVIII ст. Ж. Лагранж.

Таким чином, для Ньютона при побудові інтегрального числення первинними були поняття первісної або невизначеного інтеграла. У той самий час для Лейбніца при побудові його теорії основним поняттям було поняття визначеного інтеграла. Обоє ці вчені, незалежно один від одного, пришли до формули, яку в сучасних позначеннях записують так:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

і називають «формулою Ньютона–Лейбніца».

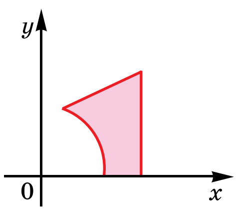
Вагомий внесок у розвиток інтегрального числення зробив відомий український математик Михайло Васильович Остроградський. Його ім'ям названо декілька теорем, методів розв'язування інтегралів, формул. Багато робіт Остроградського присвячено також розв'язуванню диференціальних рівнянь.

М.В. Остроградський (1801–1862)

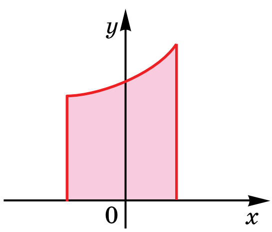
● Що називають криволінійною трапецією? ● Сформулюйте теорему про площу криволінійної трапеції. ● Що називають визначеним інтегралом функції $f(x)$ на проміжку $[a; b]$? ● У чому полягає геометричний зміст визначеного інтеграла? ● У чому полягає фізичний зміст визначеного інтеграла?

Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

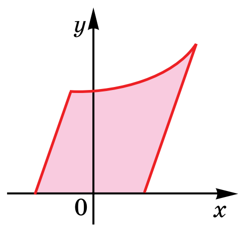
1 **10.1.** Які з фігур (мал. 10.7–10.12) можна назвати криволінійною трапецією?



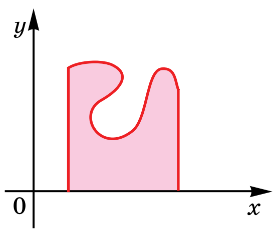
Мал. 10.7



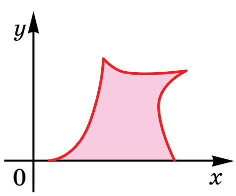
Мал. 10.8



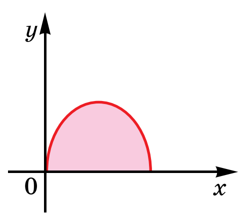
Мал. 10.9



Мал. 10.10

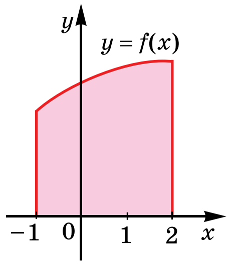


Мал. 10.11

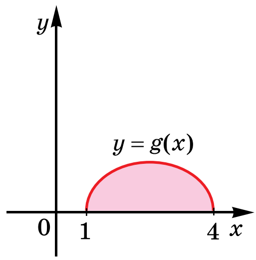


Мал. 10.12

10.2. Запишіть у вигляді визначеного інтеграла площі фігур, зображених на малюнках 10.13 і 10.14.



Мал. 10.13



Мал. 10.14

2 Знайдіть площу фігури, обмеженої лініями (**10.3–10.4**):

10.3. 1) $y = x^2$, $y = 0$, $x = 1$ і $x = 3$;
2) $y = x$, $y = 0$, $x = 2$ і $x = 5$;
3) $y = \cos x$, $y = 0$, $x = 0$ і $x = \frac{\pi}{6}$;
4) $y = 1 + x^2$, $y = 0$, $x = 0$ і $x = 1$.

10.4. 1) $y = x^3$, $y = 0$, $x = 1$ і $x = 2$;
2) $y = x^2$, $y = 0$, $x = 3$ і $x = 4$;
3) $y = \sin x$, $y = 0$, $x = \frac{\pi}{3}$ і $x = \frac{\pi}{2}$;
4) $y = 1 + x$, $y = 0$, $x = 1$ і $x = 4$.

Знайдіть, попередньо виконавши схематичний малюнок, площу фігури, обмеженої лініями (**10.5–10.6**):

10.5. 1) $y = x^3$, $y = 0$ і $x = 2$; 2) $y = 4 - x^2$ і $y = 0$.

10.6. 1) $y = x$, $y = 0$ і $x = 4$; 2) $y = 1 - x^2$ і $y = 0$.

10.7. Фізичне тіло рухається прямолінійно зі швидкістю $v(t) = 6 + 0{,}4t$ (м/с). Знайдіть шлях, який пройшло тіло:
1) за перші 2 с після початку відліку часу;
2) за інтервал часу від $t_1 = 4$ с до $t_2 = 10$ с.

10.8. Матеріальна точка рухається прямолінійно зі швидкістю $v(t) = 8 + 0{,}6t$ (м/с). Знайдіть шлях, який пройшла точка:
1) за перші 4 с після початку відліку часу;
2) за інтервал часу від $t_1 = 10$ с до $t_2 = 20$ с.

3 Знайдіть, попередньо виконавши схематичний малюнок, площу фігури, обмеженої лініями (**10.9–10.12**):

10.9. 1) $y = x^2 - 1$, $y = 0$ і $x = 3$;
2) $y = x^2 - 2x$, $y = 0$ і $x = -1$.

10.10. 1) $y = x^2 - 4$, $y = 0$ і $x = 3$;
2) $y = x^2 + 2x$, $y = 0$ і $x = -4$.

10.11. 1) $y = \cos 4x$, $y = 0$, $x = -\frac{\pi}{8}$ і $x = \frac{\pi}{8}$;
2) $y = \sin\frac{x}{2}$, $y = 0$, $x = \frac{2\pi}{3}$ і $x = \pi$.

10.12. 1) $y = \sin 2x$, $y = 0$, $x = \frac{\pi}{6}$ і $x = \frac{\pi}{2}$;
2) $y = \cos\frac{x}{4}$, $y = 0$, $x = 0$ і $x = 2\pi$.

10.13. Тіло рухається прямолінійно зі швидкістю $v(t) = 5t - 0{,}2t^2$ (м/с). Знайдіть:
1) шлях, який пройшло тіло від початку руху до зупинки;
2) прискорення тіла в момент часу $t = 10$ с.

10.14. Тіло рухається прямолінійно зі швидкістю $v(t) = 4t - 0{,}4t^2$ (м/с). Знайдіть:
1) шлях, який пройшло тіло від початку руху до зупинки;
2) прискорення тіла в момент часу $t = 5$ с.

10.15. Знайдіть, попередньо виконавши схематичний малюнок, площу фігури, обмеженої лініями:

$$y = |\sin x|,\ y = 0,\ x = \pi \text{ і } x = \frac{5\pi}{3}.$$

10.16. Знайдіть, попередньо виконавши схематичний малюнок, площу фігури, обмеженої лініями:

$$y = |\cos x|,\ y = 0,\ x = \frac{\pi}{2} \text{ і } x = \frac{11\pi}{6}.$$

4 **10.17.** Знайдіть, попередньо виконавши схематичний малюнок, площу фігури, обмеженої лініями:

$$y = \begin{cases} 2\cos 2x, \text{ якщо } -\frac{\pi}{4} \leqslant x \leqslant 0, \\ 2 - \frac{1}{3}x, \text{ якщо } 0 < x \leqslant 6 \end{cases} \quad \text{і} \quad y = 0.$$

10.18. Знайдіть, попередньо виконавши схематичний малюнок, площу фігури, обмеженої лініями:

$$y = \begin{cases} 1 + \frac{1}{4}x, \text{ якщо } -4 \leqslant x \leqslant 0, \\ 1 - \sin 2x, \text{ якщо } 0 < x \leqslant \frac{\pi}{4} \end{cases} \quad \text{і} \quad y = 0.$$

10.19. Матеріальна точка рухається прямолінійно з прискоренням $a(t) = 3t^2 + 1$ (м/с^2). Знайдіть шлях, який пройшла точка за інтервал часу від $t_1 = 1$ с до $t_2 = 2$ с, якщо в момент часу $t = 1$ с її швидкість становила 5 м/с.

10.20. Тіло рухається прямолінійно з прискоренням $a(t) = 2t - 1$ (м/с^2). Знайдіть шлях, який пройшло тіло за інтервал часу від $t_1 = 3$ с до $t_2 = 6$ с, якщо в момент часу $t = 2$ с його швидкість була 7 м/с.

Життєва математика

10.21. Заробітна плата менеджера супермаркету електроніки у 2017 році становила 8000 грн. Щомісяця із зарплати утримувалося 18 % податку на доходи фізичних осіб і 1,5 % військового збору. На початку року менеджер вирішив відкладати 10 % отриманих «на руки» грошей на придбання нового смартфона, роздрібна ціна якого в його супермаркеті становить 4000 грн. Через скільки місяців менеджер купив смартфон, якщо супермаркет надав йому знижку 15 % від роздрібної ціни?

10.22. Для приготування гречаної каші на одну частину гречаної крупи беруть дві частини води.

1) Скільки грамів води потрібно взяти, якщо гречаної крупи взято 225 г?

2) Скільки гречаної крупи потрібно взяти, якщо води взято 700 г?

3) (*Проектна діяльність.*) Об'єднайтеся у групу по 2–3 особи. Визначте для кожного члена вид крупи, який він має дослідити. Дізнайтеся з Інтернету про корисні властивості круп і різні способи їх приготування. Спробуйте приготувати одну з них. Підготуйте презентацію для виступу перед класом.

Перевірте свою компетентність!

Завдання № 10

1. Обчисліть $\log_2 12 - \log_2 3$.

А	Б	В	Г	Д
4	$\log_2 9$	9	2	1

2. Бригадирка має розподілити чотири завдання між чотирма робітниками, давши кожному з робітників одне завдання. Скількома способами вона може це зробити?

А	Б	В	Г	Д
4	8	16	24	48

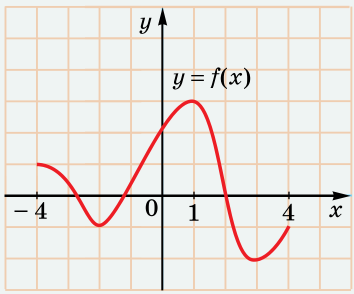
3. Відомо, що $m > n$. Серед наведених нерівностей укажіть правильну.

А	Б	В	Г	Д
$-m > -n$	$2 - m > 2 - n$	$-\frac{m}{2} < -\frac{n}{2}$	$\sqrt{5}m < \sqrt{5}n$	$\frac{m}{10} < \frac{n}{10}$

4. Знайдіть найменший додатний корінь рівняння $2\sin x + \sqrt{3} = 0$.

А	Б	В	Г	Д
$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{6}$

5. На малюнку зображено графік функції $y = f(x)$, яка визначена на проміжку $[-4;\ 4]$. Скільки коренів має рівняння $f(x) = -x$ на цьому проміжку?



А	Б	В	Г	Д
0	1	2	3	4

6. Обчисліть $125^{\frac{2}{3}} - 16^{\frac{3}{4}}$.

А	Б	В	Г	Д
109	$71\frac{1}{3}$	17	16	інша відповідь

7. Установіть відповідність між рівнянням (1–4) та його розв'язком (А–Д).

Рівняння

1 $\log_3 x = 2$
2 $\log_{\frac{1}{5}} x = -1$
3 $\log_2(x + 1) = 3$
4 $\log_7(x - 2) = 0$

Розв'язок рівняння

А 1
Б 3
В 5
Г 7
Д 9

	А	Б	В	Г	Д
1					
2					
3					
4					

8. Обчисліть суму перших двадцяти непарних натуральних чисел.

9. Знайдіть найменше значення функції $f(x) = 2x^3 - 3x^2$ на проміжку $[0;\ 2]$.

§ 11. ОБЧИСЛЕННЯ ВИЗНАЧЕНИХ ІНТЕГРАЛІВ. ОСНОВНІ ВЛАСТИВОСТІ ВИЗНАЧЕНИХ ІНТЕГРАЛІВ

У попередньому параграфі ввели означення визначеного інтеграла $\int_a^b f(x)dx$ як різницю $F(b) - F(a)$, де $F(x)$ − первісна для функції $f(x)$, розглянули геометричний і фізичний зміст визначеного інтеграла. У цьому параграфі розглянемо методи обчислення визначеного інтеграла.

1. Обчислення визначених інтегралів за формулою Ньютона−Лейбніца

За наведеним у попередньому параграфі означенням маємо:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Цю формулу називають *формулою Ньютона−Лейбніца*. Під час обчислення визначених інтегралів зручно різницю $F(b) - F(a)$ записувати так: $F(x)\Big|_a^b$. Використовуючи це позначення, формулу Ньютона−Лейбніца записують ще й у такому вигляді:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Формула Ньютона−Лейбніца є однією з найважливіших у курсі математичного аналізу. За її допомогою обчислюють визначені інтеграли в тому разі, коли для підінтегральної функції $f(x)$ можна знайти первісну $F(x)$. Саме такі визначені інтеграли й розглядаються у школі. При цьому зауважимо, що умова $f(x) \geqslant 0$ для всіх $x \in [a; b]$ не є обов'язковою; обов'язковою є лише неперервність функції $y = f(x)$ на проміжку $[a; b]$.

Розглянемо приклади застосування формули Ньютона−Лейбніца.

Задача 1. Обчислити інтеграл $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx$.

Розв'язання. Для функції $f(x) = \sin x$ однією з первісних є $F(x) = -\cos x$, тому за формулою Ньютона−Лейбніца маємо:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = -\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = -\cos\frac{\pi}{2} - (-\cos 0) = 0 + 1 = 1.$$

Відповідь. 1.

Задача 2. Обчислити інтеграл $\int_{-1}^{1}(2x-3x^2)dx$.

Розв'язання. 1) Використовуючи правила обчислення первісних і таблицю первісних, для функції $f(x) = 2x - 3x^2$ матимемо: $F(x) = 2\cdot\frac{x^2}{2} - 3\cdot\frac{x^3}{3}$; $F(x) = x^2 - x^3$.

2) Маємо:

$$\int_{-1}^{1}(2x-3x^2)dx = (x^2 - x^3)\Big|_{-1}^{1} = \left(1^2 - 1^3\right) - \left((-1)^2 - (-1)^3\right) = 0 - 2 = -2.$$

Відповідь. −2.

Зауважимо, що під час оформлення останньої задачі знаходження первісної можна було не записувати окремо. Тоді оформлення виглядатиме так:

$$\int_{-1}^{1}(2x-3x^2)dx = \left(2\cdot\frac{x^2}{2} - 3\cdot\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-1}^{1} = \left(x^2 - x^3\right)\Big|_{-1}^{1} =$$

$$= \left(1^2 - 1^3\right) - \left((-1)^2 - (-1)^3\right) = 0 - 2 = -2.$$

Задача 3. Обчислити інтеграл $\int_{0}^{2}\frac{dx}{\sqrt{4x+1}}$.

Розв'язання. 1) При знаходження первісної для функції $f(x) = \frac{1}{\sqrt{4x+1}}$ використовуємо правило 3 знаходження первісних з § 9 і таблицю первісних. Маємо:

$$F(x) = \frac{1}{4}\cdot 2\sqrt{4x+1} = \frac{1}{2}\sqrt{4x+1}.$$

2) Використовуючи формулу Ньютона–Лейбніца, отримаємо:

$$\int_{0}^{2}\frac{dx}{\sqrt{4x+1}} = \frac{1}{2}\sqrt{4x+1}\Big|_{0}^{2} = \frac{1}{2}\sqrt{4\cdot 2+1} - \frac{1}{2}\sqrt{4\cdot 0+1} =$$

$$= \frac{1}{2}(\sqrt{9} - \sqrt{1}) = \frac{1}{2}(3-1) = 1.$$

Відповідь. 1.

Зауважимо, що в останньому прикладі винесення за дужки спільного множника $\frac{1}{2}$ спрощує обчислення.

2. Властивості визначеного інтеграла

Розглянемо найпростіші властивості визначеного інтеграла. Раніше ви розглядали визначені інтеграли виду $\int_a^b f(x)dx$, коли $a < b$. Також можна розглядати інтеграли такого виду і у випадку $a \geqslant b$. До того ж буде правильною така властивість.

Властивість 1. **Якщо переставити межі інтегрування, то інтеграл змінює знак на протилежний:**

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx.$$

Доведення. Оскільки

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) \text{ і } -\int_b^a f(x)dx = -\left(F(a) - F(b)\right) = F(b) - F(a),$$

то

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx. \blacksquare$$

Властивість 2. **Для будь-якого a виконується:**

$$\int_a^a f(x)dx = 0.$$

Доведення.

$$\int_a^a f(x)dx = F(a) - F(a) = 0. \blacksquare$$

Властивість 3. **Інтеграл суми функцій дорівнює сумі інтегралів цих функцій, тобто**

$$\int_a^b \left(f(x) + g(x)\right)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx.$$

Доведення.
Нехай $F(x)$ – первісна для $f(x)$, а $G(x)$ – первісна для $g(x)$, тоді $F(x) + G(x)$ – первісна для $f(x) + g(x)$. Маємо

$$\int_a^b \left(f(x) + g(x)\right)dx = \left(F(x) + G(x)\right)\Big|_a^b = \left(F(b) + G(b)\right) - \left(F(a) + G(a)\right) =$$

$$= \left(F(b) - F(a)\right) + \left(G(b) - G(a)\right) = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx. \blacksquare$$

Зауважимо, що властивість 3 виконується для будь-якої кількості доданків.

Властивість 4. Сталий множник можна виносити за знак інтеграла, тобто

$$\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx.$$

Доведення. Нехай $F(x)$ – первісна для $f(x)$, тоді функція $kF(x)$ – буде первісною для $kf(x)$. Маємо:

$$\int_a^b kf(x)dx = kF(x)\Big|_a^b = kF(b) - kF(a) = k\big(F(b) - F(a)\big) = k\int_a^b f(x)dx. \blacksquare$$

Дві останні властивості можна використовувати для обчислення інтегралів того самого вигляду, який розглянуто в задачі 2 цього параграфа.

Задача 4. Обчислити інтеграл $\int_1^2 \left(4x^3 + \frac{6}{x^2}\right)dx.$

Розв'язання. Використовуючи послідовно властивості 3 і 4, матимемо:

$$\int_1^2 \left(4x^3 + \frac{6}{x^2}\right)dx = \int_1^2 4x^3dx + \int_1^2 \frac{6dx}{x^2} = 4\int_1^2 x^3dx + 6\int_1^2 \frac{dx}{x^2} =$$

$$= 4\cdot\frac{x^4}{4}\bigg|_1^2 + 6\cdot\left(-\frac{1}{x}\right)\bigg|_1^2 = x^4\Big|_1^2 - \frac{6}{x}\bigg|_1^2 = (2^4 - 1^4) - \left(\frac{6}{2} - \frac{6}{1}\right) =$$

$$= 15 - (-3) = 18.$$

Відповідь. 18.

Властивість 5. Нехай c – деяка точка проміжку $[a; b]$, тоді

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

Доведення. Нехай $F(x)$ – первісна для $f(x)$. Тоді

$$\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^c + F(x)\Big|_c^b = F(c) - F(a) + F(b) - F(c) =$$

$$= F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)dx. \blacksquare$$

Задача 5. Обчислити $\int_{-2}^4 f(x)dx$, якщо

$$f(x) = \begin{cases} -x \text{ при } -2 \leqslant x \leqslant 0, \\ 4x^3 \text{ при } 0 < x \leqslant 4. \end{cases}$$

Розв'язання. $\int_{-2}^{4} f(x)dx = \int_{-2}^{0}(-x)dx + \int_{0}^{4} 4x^3dx =$

$= -\int_{-2}^{0} xdx + 4\int_{0}^{4} x^3dx = -\frac{x^2}{2}\Big|_{-2}^{0} + 4\cdot\frac{x^4}{4}\Big|_{0}^{4} = -\frac{x^2}{2}\Big|_{-2}^{0} + x^4\Big|_{0}^{4} =$

$= -\left(\frac{0^2}{2} - \frac{(-2)^2}{2}\right) + (4^4 - 0^4) = 2 + 256 = 258.$

Відповідь. 258.

● Запишіть формулу Ньютона–Лейбніца. ● Сформулюйте й доведіть властивості визначених інтегралів.

Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

11.1. Чи правильно знайдено визначений інтеграл:

1) $\int_{0}^{1} xdx = \frac{x^2}{2}\Big|_{0}^{1} = \frac{1^2}{2} - \frac{0^2}{2} = \frac{1}{2}$;

2) $\int_{-2}^{1} 5dx = 5x + C$;

3) $\int_{-2}^{0} x^2dx = \frac{x^3}{3}\Big|_{-2}^{0} = \frac{(-2)^2}{3} - \frac{0^3}{3} = -\frac{8}{3}$;

4) $\int_{0}^{\pi} \sin x dx = -\cos x\Big|_{0}^{\pi} = -\cos\pi - (-\cos 0) = 0 + 1 = 1$?

Обчисліть інтеграл (**11.2–11.9**):

11.2. 1) $\int_{-3}^{0} x^2dx$; 2) $\int_{4}^{7} 3dx$; 3) $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \cos x dx$; 4) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin^2 x}$.

11.3. 1) $\int_{0}^{1} x^4dx$; 2) $\int_{-1}^{2} 4dx$; 3) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx$; 4) $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^2 x}$.

11.4. 1) $\int_{1}^{5} (2x+1)dx$; 2) $\int_{0}^{2} (x^3 - x)dx$; 3) $\int_{1}^{2} \frac{dx}{x^3}$; 4) $\int_{-2}^{-1} \left(2 - \frac{1}{x^4}\right)dx$.

11.5. 1) $\int_{0}^{3} (x^2 - 2x)dx$; 2) $\int_{-2}^{2} (1 + x^3)dx$; 3) $\int_{-3}^{-1} \frac{dx}{x^2}$; 4) $\int_{0,5}^{1} \left(\frac{1}{x^5} + 1\right)dx$.

3

11.6. 1) $\int_0^1 (x-1)^4\,dx$; 2) $\int_{\frac{\pi}{2}}^{3\pi} \cos\frac{x}{3}\,dx$;

3) $\int_{-1}^{0} (2x+1)^5\,dx$; 4) $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\sin^2\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{3}\right)}$.

11.7. 1) $\int_{-1}^{1} (x+1)^3\,dx$; 2) $\int_0^{2\pi} \sin\frac{x}{4}\,dx$;

3) $\int_0^1 (1-2x)^4\,dx$; 4) $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\cos^2\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{6}\right)}$.

11.8. 1) $\int_{0,1}^{0,2} \left(\frac{1}{x^3}-\frac{1}{(10x+1)^2}\right)dx$; 2) $\int_0^4 ((0,5x-1)^3+\sin \pi x)dx$.

11.9. 1) $\int_{0,2}^{0,5} \left(\frac{1}{x^2}+\frac{40}{(10x+1)^3}\right)dx$; 2) $\int_0^2 ((1-x)^2+\cos \pi x)dx$.

4

Обчисліть інтеграл, використовуючи його геометричний зміст (**11.10–11.11**):

11.10. 1) $\int_0^2 \sqrt{4-x^2}\,dx$; 2) $\int_{-3}^{3} \sqrt{9-x^2}\,dx$.

11.11. 1) $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$; 2) $\int_{-4}^{4} \sqrt{16-x^2}\,dx$.

Обчисліть інтеграл (**11.12–11.13**):

11.12. 1) $\int_0^2 (x^2+2x)^2\,dx$; 2) $\int_{0,25}^{0,5} \frac{2x^5-x^4+x^2}{x^4}\,dx$; 3) $\int_0^{\pi} \sin^2 x\,dx$.

11.13. 1) $\int_0^3 (2x-x^2)^2\,dx$; 2) $\int_2^4 \frac{2x^3-x^2-1}{x^2}\,dx$; 3) $\int_0^{2\pi} \cos^2 x\,dx$.

11.14. Знайдіть $\int_{-2}^{1} f(x)dx$, якщо $f(x)=\begin{cases} x^2 \text{ при } -2 \leqslant x \leqslant -1, \\ 2x+3 \text{ при } -1 < x \leqslant 1. \end{cases}$

11.15. Знайдіть $\int_0^4 f(x)dx$, якщо $f(x)=\begin{cases} 3x-1 \text{ при } 0 \leqslant x \leqslant 2, \\ x^2+1 \text{ при } 2 < x \leqslant 4. \end{cases}$

11.16. Обчисліть інтеграл $\int_{1}^{4} |x-2|\, dx$.

11.17. Обчисліть інтеграл $\int_{-2}^{5} |x-1|\, dx$.

11.18. Обчисліть інтеграл $\int_{-2}^{2} \left(1+\sqrt{4-x^2}\right) dx$, використовуючи його геометричний зміст.

Життєва математика

11.19. Офіс обладнаний приладами освітлення, які споживають 900 ват щогодини. Щодоби прилади працюють по 10 годин. Якщо замінити прилади освітлення на енергозберігаючі, то витрати скоротяться на 30 %.

1) Скільки ват протягом тижня (5 робочих днів) можна заощадити, використовуючи енергозберігаючі прилади?

2) (*Практична діяльність.*) Дізнайтеся, скільки коштує 1 кВт · год (1 кВт = 1000 Вт). Обчисліть, скільки грошей можна зекономити протягом 5 робочих днів, якщо використати енергозберігаючі прилади.

11.20. Визначте, скільки відсотків свого місячного доходу витрачає на цигарки людина, що викурює одну пачку на добу, коли пачка цигарок коштує 30 грн, а щомісячна зарплата 7500 грн (у місяці 30 днів).

Перевірте свою компетентність!

Завдання № 11

1. У деякому класі кількість хлопців відноситься до кількості дівчат як 2 : 3. Якою може бути загальна кількість учнів у цьому класі?

А	Б	В	Г	Д
20	21	22	23	24

2. На полиці розміщено 5 книжок з алгебри, 3 – з геометрії, 2 – з фізики. З полиці навмання беруть одну книжку. Яка ймовірність того, що вона не з фізики?

А	Б	В	Г	Д
0,2	0,3	0,5	0,7	0,8

3. Спростіть вираз $(1 - \sin^2\alpha)\mathrm{tg}^2\alpha$.

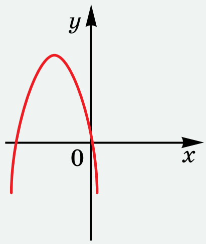
А	Б	В	Г	Д
$\sin 2\alpha$	$\sin^2\alpha$	$\mathrm{tg}^2\alpha$	$\dfrac{\cos^4\alpha}{\sin^2\alpha}$	інша відповідь

4. Розв'яжіть нерівність $\log_{\frac{1}{2}}(x-1) > 0$.

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty;\ 2)$	$(-\infty;\ 1)$	$(1;\ +\infty)$	$(1;\ 2)$	$(2;\ +\infty)$

5. На малюнку зображено ескіз графіка функції $y = ax^2 + bx + c$. Укажіть правильне твердження щодо коефіцієнтів a, b, c.

А	Б	В	Г	Д
$\begin{cases} a > 0, \\ b < 0, \\ c < 0 \end{cases}$	$\begin{cases} a < 0, \\ b < 0, \\ c > 0 \end{cases}$	$\begin{cases} a < 0, \\ b < 0, \\ c = 0 \end{cases}$	$\begin{cases} a < 0, \\ b > 0, \\ c = 0 \end{cases}$	$\begin{cases} a < 0, \\ b > 0, \\ c > 0 \end{cases}$



6. Обчисліть $\sqrt[4]{5\frac{1}{16}}$.

А	Б	В	Г	Д
$\frac{1}{2}\sqrt[4]{5}$	1,5	2,5	4,5	інша відповідь

7. Установіть відповідність між функцією $y = f(x)$ (1–4) та значенням інтеграла $\int\limits_{-1}^{1} f(x)dx$ (А–Д).

Функція

1 $f(x) = x - 1$

2 $f(x) = 2x$

3 $f(x) = x^2$

4 $f(x) = x^3 + 1$

Значення інтеграла

А -2

Б $-\dfrac{2}{3}$

В 0

Г $\dfrac{2}{3}$

Д 2

	А	Б	В	Г	Д
1					
2					
3					
4					

8. Знайдіть найменший корінь рівняння $\big||2x - 1| + 3\big| = 5$.

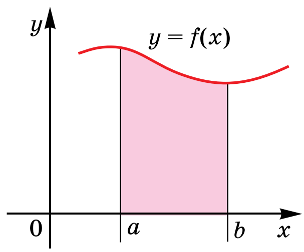
9. Знайдіть значення виразу $\sin 15^\circ \sin 75^\circ$.

§ 12. ОБЧИСЛЕННЯ ПЛОЩ ПЛОСКИХ ФІГУР, ІНШІ ЗАСТОСУВАННЯ ВИЗНАЧЕНОГО ІНТЕГРАЛА У ФІЗИЦІ

В одному з попередніх параграфів ви використовували первісну для функції під час знаходження площі криволінійної трапеції та в деяких фізичних задачах. Розглянемо використання визначеного інтеграла для обчислення площ плоских фігур та у фізиці.

1. Обчислення площ плоских фігур

Як ви вже знаєте, площа криволінійної трапеції, обмеженої графіком неперервної функції $y = f(x)$, прямими $y = 0$, $x = a$ і $x = b$, за умови, що $f(x) \geqslant 0$ для всіх $x \in [a; b]$, обчислюється як різниця $F(b) - F(a)$, де $F(x)$ – первісна для функції $f(x)$ (мал. 12.1). З іншого боку, за формулою Ньютона–Лейбніца $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$.



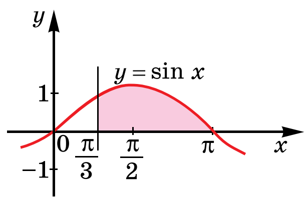
Мал. 12.1

Таким чином, можна зробити висновок про те, що

площа S криволінійної трапеції, обмеженої графіком неперервної функції $y = f(x)$, прямими $y = 0$, $x = a$ і $x = b$, за умови, що $f(x) \geqslant 0$ для всіх $x \in [a; b]$, дорівнює

$$S = \int_a^b f(x)dx.$$

Задача 1. Обчислити за допомогою визначеного інтеграла площу криволінійної трапеції, обмеженої лініями $y = \sin x$, $y = 0$, $x = \frac{\pi}{3}$ і $x = \pi$ (мал. 12.2).



Мал. 12.2

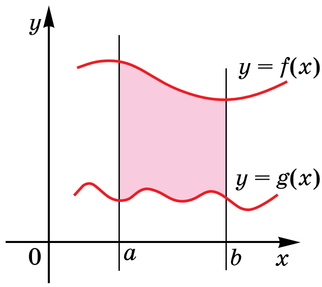
Розв’язання.

$$S = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} \sin x dx = -\cos x \Big|_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} = -\cos\pi - \left(-\cos\frac{\pi}{3}\right) = 1 + \frac{1}{2} = 1{,}5.$$

Відповідь. 1,5.

Розглянемо плоску фігуру, зверху обмежену графіком функції $y = f(x)$, знизу – графіком функції $y = g(x)$, вертикальними прямими $x = a$, $x = b$, причому функції $y = f(x)$,

$y = g(x)$ – неперервні на $[a; b]$ і для всіх значень $x \in [a; b]$ виконуються нерівності $f(x) \geqslant 0$, $g(x) \geqslant 0$, $f(x) \geqslant g(x)$ (мал. 12.3).



Мал. 12.3

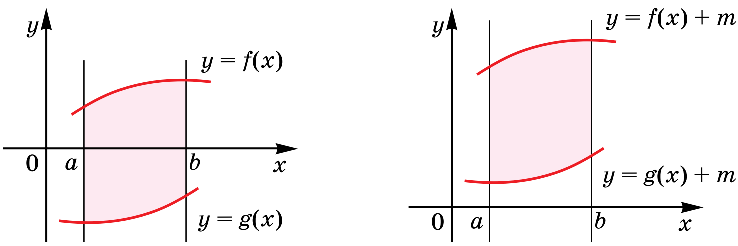
Площа цієї фігури S дорівнює різниці площ $S_f - S_g$, де S_f – площа криволінійної трапеції, обмеженої лініями $y = f(x)$, $y = 0$, $x = a$, $x = b$, а S_g – площа криволінійної трапеції, обмеженої лініями $y = g(x)$, $y = 0$, $x = a$, $x = b$. Отже,

$$S = S_f - S_g = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx.$$

Використовуючи властивості інтеграла, маємо

$$S = \int_a^b \big(f(x) - g(x)\big)dx.$$

Ця формула буде правильною і в тому випадку, коли одна або обидві умови $f(x) \geqslant 0$ і $g(x) \geqslant 0$ не виконуються. У цьому разі достатньо перенести плоску фігуру вздовж осі ординат на m одиниць, вибравши m довільним чином так, щоб уся фігура розміщувалася вище від осі абсцис (мал. 12.4).



Мал. 12.4

Тоді площа шуканої фігури

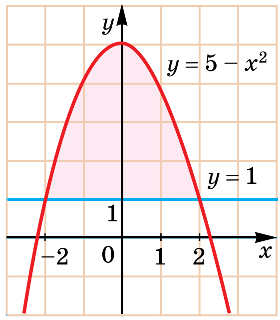
$$S = \int_a^b \big((f(x) + m) - (g(x) + m)\big)dx = \int_a^b \big(f(x) - g(x)\big)dx.$$

Отже,

площа S плоскої фігури, яка обмежена неперервними на проміжку $[a; b]$ функціями $y = f(x)$ і $y = g(x)$ такими, що для всіх $x \in [a; b]$ виконується $f(x) \geqslant g(x)$, та прямими $x = a$ і $x = b$, обчислюється за формулою

$$S = \int_a^b \big(f(x) - g(x)\big)dx.$$

Задача 2. Знайти площу фігури, обмеженої лініями $y = 5 - x^2$ і $y = 1$.



Мал. 12.5

Розв'язання. 1) Знайдемо абсциси точок перетину графіків. Маємо $5 - x^2 = 1$; $x^2 = 4$; $x = \pm 2$. Ордината обох точок перетину дорівнює 1.

2) Зобразимо схематично графіки функцій і абсциси їх точок перетину (мал. 12.5).

3) Шукана площа:

$$S = \int_{-2}^{2}(5 - x^2 - 1)dx = \int_{-2}^{2}(4 - x^2)dx =$$

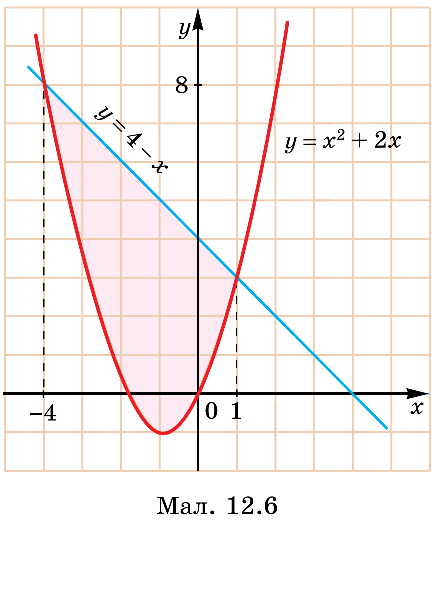
$$= \left(4x - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-2}^{2} = \left(4 \cdot 2 - \frac{2^3}{3}\right) - \left(4 \cdot (-2) - \frac{(-2)^3}{3}\right) = 10\frac{2}{3}.$$

Відповідь. $10\frac{2}{3}$.

Задача 3. Знайти площу фігури, обмеженої лініями $y = x^2 + 2x$ і $y = 4 - x$.

Розв'язання. 1) Знайдемо абсциси точок перетину графіків функцій: $x^2 + 2x = 4 - x$; $x^2 + 3x - 4 = 0$; $x_1 = 1$; $x_2 = -4$. Ординати точок перетину $y_1 = 3$; $y_2 = 8$.

2) Зобразимо схематично графіки функцій (мал. 12.6).



Мал. 12.6

3) Шукана площа:

$$S = \int_{-4}^{1}\left((4-x)-(x^2+2x)\right)dx = \int_{-4}^{1}(-x^2-3x+4)dx =$$

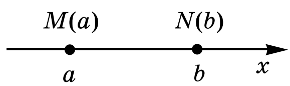
$$= \left(-\frac{x^3}{3}-\frac{3x^2}{2}+4x\right)\Bigg|_{-4}^{1} = \left(-\frac{1^3}{3}-\frac{3\cdot 1^2}{2}+4\cdot 1\right) -$$

$$-\left(-\frac{(-4)^3}{3}-\frac{3\cdot(-4)^2}{2}+4\cdot(-4)\right) = 2\frac{1}{6}+18\frac{2}{3} = 20\frac{5}{6}.$$

Відповідь. $20\frac{5}{6}$.

2. Застосування визначеного інтеграла у фізиці

Розглянемо одне із застосувань визначеного інтеграла у фізиці. Нехай матеріальна точка рухається вздовж осі абсцис під дією сили, проекція якої на цю вісь – неперервна на деякому проміжку функція $f(x)$. Нехай $[a; b]$ належить проміжку неперервності функції, і під дією цієї сили матеріальна точка перемістилася з точки $M(a)$ у точку $N(b)$ (мал. 12.7). Тоді роботу A цієї сили можна обчислити за формулою



Мал. 12.7

$$A = \int_a^b f(x)dx.$$

Доведення цього факту не наводимо.

Задача 6. Обчислити роботу сили F при розтягуваннні пружини на 0,05 м, якщо при розтягуванні пружини на 0,02 м потрібна сила 4 Н.

Розв'язання. 1) За законом Гука сила F пропорційна розтягу (або стиску) пружини, тобто $F = kx$, де x – величина розтягу (або стиску), k – стала.

2) Оскільки при $x = 0{,}02$ м маємо $F = 4$ Н, то можна знайти коефіцієнт $k = \frac{F}{x} = \frac{4}{0{,}02} = 200$. Отже, $F(x) = 200x$.

3) Знаходимо роботу A при розтягненні пружини на 0,05 м:

$$A = \int_0^{0{,}05} 200x\,dx = 200\cdot\frac{x^2}{2}\Bigg|_0^{0{,}05} = 100\cdot(0{,}05^2-0^2) = 0{,}25 \text{ (Дж)}.$$

Відповідь. 0,25 Дж.

● Як обчислюють площу плоскої фігури? ● Як застосовують визначений інтеграл у фізиці?

Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

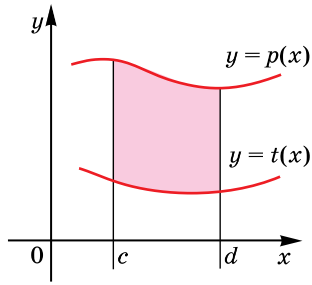
12.1. Укажіть формулу, за якою можна знайти площу заштрихованої фігури (мал. 12.8):

1) $\int\limits_0^d \big(p(x) - t(x)\big)dx$;

2) $\int\limits_c^d \big(t(x) - p(x)\big)dx$;

3) $\int\limits_c^d \big(p(x) - t(x)\big)dx$;

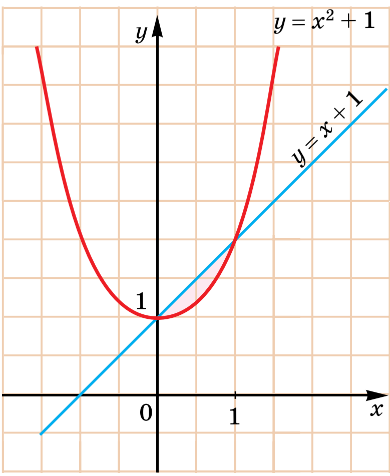
4) $\int\limits_c^d p(x)dx$.



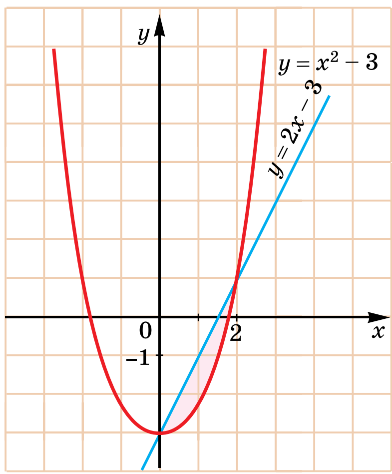
Мал. 12.8

12.2. Знайдіть площу заштрихованої фігури, зображеної на малюнку 12.9.

12.3. Знайдіть площу заштрихованої фігури (мал. 12.10).



Мал. 12.9



Мал. 12.10

12.4. Тіло рухається вздовж осі абсцис під дією сили, проекція якої на цю вісь задається формулою $f(x) = x^2 - 2x$. Знайдіть роботу, що виконує ця сила при переміщенні тіла з точки з абсцисою 3 в точку з абсцисою 6.

12.5. Тіло рухається вздовж осі абсцис під дією сили, проекція якої на цю вісь задається формулою $f(x) = 2x + 5$. Знайдіть роботу, що виконує ця сила при переміщенні тіла з точки з абсцисою 2 в точку з абсцисою 4.

Знайдіть площу фігури, обмеженої лініями (**12.6–12.7**):

12.6. 1) $y = x^2$ і $y = 3x$; 2) $y = 2 - x^2$ і $y = x$; 3) $y = 7 - x^2$ і $y = 3$; 4) $y = 3x^2$ і $y = 2x + 1$; 5) $y = 3x^2$ і $y = 4 - x^2$; 6) $y = x^2 - 2x$, $y = 3$ і $x = 0$, за умови, що $x \leqslant 0$.

12.7. 1) $y = x^2$ і $y = -3x$; 2) $y = x^2 - 3$ і $y = 2x$; 3) $y = 4 - x^2$ і $y = 3$; 4) $y = 2x^2$ і $y = x + 1$; 5) $y = x^2$ і $y = 8 - x^2$; 6) $y = x^2 - 3x$, $y = 4$ і $x = 0$, за умови, що $x \leqslant 0$.

12.8. Під дією сили 3 Н пружина розтягується на 1 см. Яку роботу треба виконати, щоб розтягнути цю пружину на 5 см?

12.9. Під дією сили 5 Н пружина розтягується на 2 см. Яку роботу треба виконати, щоб розтягнути цю пружину на 6 см?

Знайдіть площу фігури, обмеженої лініями (**12.10–12.11**):

12.10. $y = \cos x$, $y = -3\cos x$, $x = -\frac{\pi}{6}$, $x = 0$.

12.11. $y = \sin x$, $y = -2\sin x$, $x = -\frac{\pi}{3}$, $x = 0$.

12.12. Знайдіть площу фігури, обмеженої параболою $y = x^2 + 4x$, дотичною, проведеною до цієї параболи в точці з абсцисою $x = -1$, і віссю ординат.

Життєва математика

12.13. 60 кг макулатури зберігає від вирубки одне дерево. З 1 т макулатури можна виготовити 2500 зошитів і при цьому зекономити 200 м^3 води. Учні школи зібрали на весняній толоці 1,2 т макулатури. Знайдіть: 1) скільки дерев зберегли учні; 2) скільки зошитів можна виготовити із цієї макулатури; 3) скільки води буде зекономлено.

12.14. Родина витрачає 12 % своїх доходів на оплату житла, 48 % – на продукти харчування, 18 % – на різні одноразові витрати, а решту – на відпочинок, що становить 33 000 грн на рік. Який річний бюджет родини?

Перевірте свою компетентність!

Завдання № 12

1. Укажіть точку, яка належить графіку рівняння $2x - 3y = 7$.

А	Б	В	Г	Д
(–2; 1)	(2; –1)	(–2; –1)	(2; 1)	жодна із запропонованих

2. Числа 4, x і 1 є послідовними членами геометричної прогресії. Знайдіть x.

А	Б	В	Г	Д
2,5	2	2 або −2	0	визначити неможливо

3. Множиною значень функції $y = 2^x + 1$ є...

А	Б	В	Г	Д
$[0; +\infty)$	$(-\infty; +\infty)$	$(0; +\infty)$	$(1; +\infty)$	$[1; +\infty)$

4. Знайдіть первісну для функції $f(x) = \sin x$, яка проходить через точку $(\pi; 2)$.

А	Б	В	Г	Д
$-\cos x$	$-\cos x + 2$	$-\cos x + 1$	$\sin x + 1$	$\cos x + 3$

5. Яке з рівнянь має безліч розв'язків?

А	$2(x-1) = 2x - 2$	Г	$\frac{1}{\cos x} = \frac{1}{3}$
Б	$\sin x = -1{,}5$		
В	$\lvert x - 3\rvert = 1$	Д	$x^2 + 2x - 3 = 0$

6. Обчисліть $\sqrt{\left(\sqrt{11} - 4\right)^2} + 4$.

А	Б	В	Г	Д
$\sqrt{11}$	$\sqrt{11} + 2$	$8 - \sqrt{11}$	$\sqrt{11} + 8$	15

7. Установіть відповідність між числовим виразом (1–4) та значенням цього виразу (А–Д).

Числовий вираз		*Значення числового виразу*	
1	$\sqrt{5}(\sqrt{20} - \sqrt{5})$	**А**	2
2	$\frac{1}{\sqrt{5}}(\sqrt{45} - \sqrt{5})$	**Б**	3
3	$(\sqrt{7} + 2)(\sqrt{7} - 2)$	**В**	4
4	$(\sqrt{5} + 1)^2 - 2\sqrt{5}$	**Г**	5
		Д	6

	А	Б	В	Г	Д
1					
2					
3					
4					

8. Знайдіть найбільше значення функції $y = \frac{1}{4\cos x + 5}$.

Якщо функція не має найбільшого значення, то запишіть у відповідь число 100.

9. У ящику 7 білих, 5 чорних і кілька жовтих намистин. Знайдіть загальну кількість намистин у ящику, якщо ймовірність витягнути навмання жовту намистину дорівнює $\frac{1}{4}$.

Домашня самостійна робота № 2

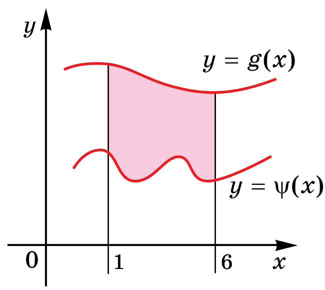
Кожне завдання має по чотири варіанти відповіді (А–Г), серед яких лише один є правильним. Оберіть правильний варіант відповіді.

1. Яка з наведених функцій не є первісною для функції $f(x) = -5$?

А. $F(x) = 4 - 5x$ **Б.** $F(x) = -5x$
В. $F(x) = 4 + 5x$ **Г.** $F(x) = -5x + 1$

2. Знайдіть загальний вигляд первісних для функції $f(x) = x^4$.

А. $F(x) = 4x^3$ **Б.** $F(x) = x^5 + C$
В. $F(x) = \frac{x^5}{5}$ **Г.** $F(x) = \frac{x^5}{5} + C$



Мал. 12.11

3. За якою формулою можна знайти площу заштрихованої фігури (мал. 12.11)?

А. $\int_0^6 (g(x) - \psi(x))dx$

Б. $\int_1^6 (\psi(x) - g(x))dx$

В. $\int_1^6 (g(x) - \psi(x))dx$ **Г.** $\int_6^1 (g(x) - \psi(x))dx$

4. Укажіть функцію, яка є однією з первісних для функції $f(x) = 3x^2 - \sin x$.

А. $F(x) = x^3 + \cos x + 4$ **Б.** $F(x) = x^3 - \cos x + 1$
В. $F(x) = 6x - \cos x$ **Г.** $F(x) = 3x^3 - \cos x - 8$

5. Тіло рухається прямолінійно зі швидкістю $v(t) = 3 + 0{,}8t$ (м/с). Знайдіть шлях, який пройшло тіло за інтервал часу від $t_1 = 5$ с до $t_2 = 10$ с.

А. 4 м **Б.** 45 м **В.** 55 м **Г.** 50 м

6. Обчисліть інтеграл $\int_{-1}^{3} (1 - 4x)dx$.

А. -16 **Б.** -15
В. -8 **Г.** -12

7. Для функції $f(x) = \cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$ знайдіть первісну, графік якої проходить через точку $B\left(-\frac{\pi}{8}; 3\right)$.

А. $F(x) = \frac{1}{2}\sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$ **Б.** $F(x) = \frac{1}{2}\sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) + 2,5$
В. $F(x) = \frac{1}{2}\sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) + 1$ **Г.** $F(x) = \frac{1}{2}\sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) + 1,5$

8. Знайдіть площу фігури, обмеженої лініями $y = 6x$ і $y = 2x^2$.
А. 9 **Б.** 27 **В.** 18 **Г.** 12

9. Знайдіть, попередньо виконавши схематичний малюнок, площу фігури, обмеженої лініями $y = |\sin x|$, $y = 0$, $x = -\pi$, $x = -\frac{\pi}{3}$.
А. 0,5 **Б.** 1,5 **В.** 1 **Г.** $1 + \frac{\sqrt{3}}{2}$

10. Обчисліть інтеграл $\int\limits_{-2}^{2}\sqrt{4 - x^2}\,dx$, використавши його геометричний зміст.
А. $\frac{1}{2}\pi$ **Б.** 4π **В.** π **Г.** 2π

11. Знайдіть $\int\limits_{-3}^{4} f(x)dx$, якщо $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 \text{ при } -3 \leqslant x \leqslant 0, \\ \left(\frac{1}{2}x + 1\right)^4 \text{ при } 0 < x \leqslant 4. \end{cases}$

А. 96,8 **Б.** 109,2 **В.** 97,2 **Г.** 108,8

12. Знайдіть загальний вигляд первісних для функції $f(x) = \frac{x^3 - 2x^2 + 1}{x^2}$, попередньо спростивши її.

А. $F(x) = x - 2 + \frac{1}{x^2} + C$ **Б.** $F(x) = \frac{x^2}{2} - 2x + \frac{1}{x} + C$
В. $F(x) = \frac{x^2}{2} - 2x - \frac{1}{x} + C$ **Г.** $F(x) = \frac{x^2}{2} + 2x - \frac{1}{x} + C$

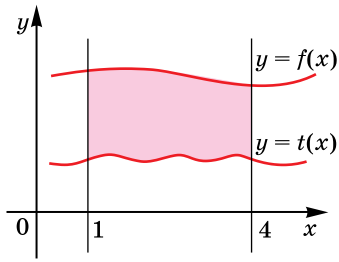
Завдання для перевірки знань до §§ 8–12

1. Які з функцій $F(x) = 3x$, $F(x) = -3x$, $F(x) = 3x - 7$, $F(x) = 0$ є первісними для функції $f(x) = 3$?

2. Знайдіть загальний вигляд первісних для функції:

1) $f(x) = x^8$; 2) $f(x) = \dfrac{1}{\cos^2 x}$.

3. За якою формулою можна знайти площу заштрихованої фігури, зображеної на малюнку 12.12?



Мал. 12.12

4. Доведіть, що функція $F(x)$ є первісною для функції $f(x)$ на заданому проміжку:

1) $F(x) = x^4 - 3x + 7$, $f(x) = 4x^3 - 3$, $x \in (-\infty; +\infty)$;

2) $F(x) = \dfrac{1}{x^2} + \sin 2x - 3$, $f(x) = -\dfrac{1}{x} + 2\cos 2x$, $x \in (0; +\infty)$.

5. Тіло рухається прямолінійно зі швидкістю $v(t) = 8 + 0{,}2t$ (м/с). Знайдіть шлях, який пройшло тіло за інтервал часу від $t_1 = 10$ с до $t_2 = 20$ с.

6. Обчисліть інтеграл: 1) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{6}}^{2\pi} \cos x\,dx$; 2) $\displaystyle\int_{-1}^{2} (2x+1)dx$.

7. Для функції $f(x) = \sin\left(2x - \dfrac{\pi}{4}\right)$ знайдіть первісну, графік якої проходить через точку $A\left(\dfrac{\pi}{8}; -2\right)$.

8. Знайдіть площу фігури, обмеженої лініями $y = 2x^2$ і $y = 4x$.

9. Знайдіть $\displaystyle\int_{-2}^{2} f(x)dx$, якщо $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 \text{ при } -2 \leqslant x < 0, \\ \left(\dfrac{1}{2}x - 1\right)^4 \text{ при } 0 \leqslant x \leqslant 2. \end{cases}$

Додаткові завдання

10. Знайдіть, попередньо виконавши схематичний малюнок, площу фігури, обмеженої лініями $y = |\cos x|$, $y = 0$, $x = \dfrac{\pi}{2}$ і $x = \dfrac{5\pi}{6}$.

11. Знайдіть загальний вигляд первісних для функції, попередньо спростивши її:

1) $f(x) = 4\sin 2x \cos 2x$; 2) $f(x) = \dfrac{x^4 + 2x^3 - x}{x^3}$.

РОЗДІЛ 3

ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ І МАТЕМАТИЧНОЇ СТАТИСТИКИ

У ЦЬОМУ РОЗДІЛІ ВИ:

- ***згадаєте*** поняття множини, означення ймовірності, випадкової події, елементи математичної статистики;
- ***ознайомитеся*** з елементами комбінаторики;
- ***навчитеся*** знаходити ймовірність випадкової події, вибіркової характеристики.

§ 13. МНОЖИНА ТА ЇЇ ЕЛЕМЕНТИ

У цьому розділі розглянемо елементи комбінаторики, теорії ймовірностей та математичної статистики.

Але спочатку треба пригадати та розширити поняття *множини*.

1. Поняття множини. Підмножина

Раніше ви вже розглядали числові множини: натуральних чисел (позначають – N), цілих чисел (позначають – Z), раціональних чисел (позначають – Q), дійсних чисел (позначають – R).

Поняття «множина» у більш широкому розумінні є одним з основних у математиці і тому не має означення. Під поняттям множини будемо розуміти певну сукупність об'єктів будь-якої природи, самі об'єкти при цьому називатимемо *елементами множини*.

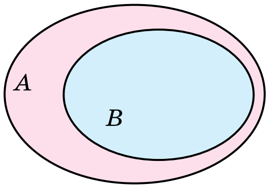
Зазвичай множини позначають великими латинськими літерами. Якщо, наприклад, множина A складається із чисел 1, 2, 3, 4, то це записують так: $A = \{1, 2, 3, 4\}$. Числа 1, 2, 3, 4 – елементи множини A. Той факт, що число 1 належить множині A, записують за допомогою знака $\in$, а саме: $1 \in A$. Число 5 не належить множині A, тому це твердження записують так: $5 \notin A$.

У математиці також розглядають множину, яка не містить жодного елемента, – *порожню множину*. Її позначають символом $\varnothing$. Так, наприклад, порожньою множиною є множина дійсних розв'язків рівняння $x^2 + 1 = 0$.

Якщо кожен елемент множини B є елементом множини A, то кажуть, що множина B є підмножиною множини A.

Записують це так: $B \subset A$. Схематично це можна проілюструвати за допомогою кругів, які ще називають *діаграмами* (*кругами*) *Ейлера–Венна* (мал. 13.1).

Приклад 1. Нехай $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{1, 2\}$, $C = \{4, 5\}$. Тоді множина B є підмножиною множини A: $B \subset A$. Множина C не є підмножиною множини A, оскільки у множину C входить елемент 5, який не входить у множину A.



Мал. 13.1

Приклад 2. Для відомих вам числових множин можна записати $N \subset Z$, $Z \subset Q$, $N \subset Q$, $Z \subset R$ тощо.

Уважають, що порожня множина є підмножиною будь-якої множини.

2. Рівність множин

Розглянемо множини $A = \{1, 2, 3\}$ і $B = \{2, 3, 1\}$. Ці множини складаються з одних і тих самих елементів, але записаних у різному порядку. Такі *множини* називають *рівними*. А записують це так: $A = B$.

Якщо множина складається зі скінченної кількості елементів, таку *множину* називають *скінченною*, у протилежному випадку множину називають *нескінченною*. Отже,

скінченні множини A і B називають *рівними*, якщо вони складаються з одних і тих самих елементів.

Означення рівних множин (як скінченних, так і нескінченних) можна дати, використовуючи поняття підмножини:

дві множини називають *рівними*, якщо кожна з них є підмножиною іншої.

3. Впорядковані множини

Під час розв'язування багатьох задач доводиться розглядати не лише множини, у яких елементи записано в довільному порядку, а й множини, у яких порядок розташування елементів важливий: який елемент записано на першому місці, який – на другому тощо. Такі множини називають *впорядкованими*. Записують впорядковані множини у круглих дужках. Наприклад, $A = (1, 2, 3)$, $B = (1, 3, 2)$. Оскільки множини впорядковані, то $A \neq B$.

Невпорядковані множини можна впорядковувати за різними правилами.

Приклад 3. Нехай дано невпорядковану множину $A = \{2, -1, 4\}$. Її можна впорядкувати за зростанням $B = (-1, 2, 4)$, за спаданням $C = (4, 2, -1)$, за зростанням модулів $D = (-1, 2, 4)$ тощо. Зауважимо, що, наприклад, $B \neq C$, але $B = D$.

• Що розуміють під поняттям множини? • Що називають елементами множини? • Що таке порожня множина? • Коли множину B називають підмножиною множини A? • Які скінченні множини називають рівними? • Дайте означення рівних множин через поняття підмножини. • Які множини називають впорядкованими?

Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

13.1. (*Усно.*) Назвіть приклади скінченних і нескінченних множин.

13.2. (*Усно.*) Назвіть елементи множини:

1) $A = \{7, 5, 9, 11\}$; 2) $B = \{*, \triangle, \square\}$.

До яких числових множин (N, Z, Q, R) належить число **(13.3–13.4)**:

13.3. 1) 8,2; 2) $-3\frac{1}{7}$; 3) 0; 4) π;
5) $\sqrt{11}$; 6) -6; 7) $\frac{e}{2}$; 8) 13?

13.4. 1) $-7{,}2$; 2) $2\frac{1}{3}$; 3) e; 4) 10;
5) $\sqrt{13}$; 6) $\frac{\pi}{3}$; 7) -5; 8) 111,2?

Запишіть множину, перерахувавши її елементи **(13.5–13.6)**:

13.5. 1) одноцифрові непарні натуральні числа;
2) парні натуральні числа, які менші за 20;
3) літери слова «атом»;
4) дні тижня.

13.6. 1) двоцифрові натуральні числа, які кратні 33;
2) непарні натуральні числа, які менші за 15;
3) літери слова «зима»;
4) місяці року.

2 **13.7.** Множина A складається з коренів рівняння $\cos x = 3$. Що це за множина?

13.8. Множина B складається з коренів рівняння $|x| + 5 = 0$. Запишіть множину B.

13.9. (*Усно.*) Наведіть приклади порожніх множин.

Чи правильне твердження **(13.10–13.11)**:

13.10. 1) $N \subset Z$; 2) $Q \subset Z$; 3) $N \subset R$; 4) $R \subset Q$?

13.11. 1) $Q \subset N$; 2) $N \subset Q$; 3) $Z \subset R$; 4) $R \subset N$?

13.12. За якою характерною властивістю записано множину:
1) $A = \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$;
2) $B = \{$до, ре, мі, фа, соль, ля, сі$\}$?

Чи правильне твердження $A \subset B$ або $C \subset D$ **(13.13–13.14)**:

13.13. 1) $A = \{1\}$, $B = \{1, 8, 7\}$; 2) $A = \{*, !\}$, $B = \{*, \triangle, \square\}$;
3) $A = \varnothing$, $B = \{$а, б, в$\}$; 4) $A = \{P, L, Q\}$, $B = \{P\}$;
5) A – множина простих чисел, B – множина цілих чисел;
6) A – множина натуральних чисел, B – множина натуральних чисел, кратних 10?

13.14. 1) $C = \{7, 8\}$, $D = \{7, 9, 10\}$;
2) $C = \{\triangle, \square\}$, $D = \{*, \triangle, \bigcirc, \square\}$;
3) $C = \{2, 7, 13\}$, $D = \varnothing$;
4) $C = \{A, Б, В\}$, $D = \{A, Б, В\}$?

13.15. Множина C складається з розв'язків рівняння $|x| - 1 = 0$, а множина D – з розв'язків рівняння $x^2 - 1 = 0$. Чи правильно, що $C \subset D$? А навпаки?

13.16. Множина A складається з розв'язків рівняння $(x - 5)(x + 2) = 0$, а множина B – з розв'язків рівняння $x^2 - 3x - 10 = 0$. Чи правильно, що $A \subset B$? А навпаки?

13.17. Упорядкуйте елементи множини $A = \{-2, 9, 7\}$:
1) за зростанням; 2) за спаданням;
3) за зростанням модулів; 4) за спаданням модулів.
Чи є серед цих впорядкованих множин рівні впорядковані множини?

13.18. Упорядкуйте елементи множини $B = \{2, -1, 7\}$:
1) за зростанням; 2) за спаданням;
3) за зростанням модулів; 4) за спаданням модулів.
Чи є серед цих впорядкованих множин рівні впорядковані множини?

13.19. Запишіть усі підмножини множини $C = \{4, 5, 6\}$, які включають:
1) один елемент;
2) два елементи;
3) три елементи.

13.20. Запишіть усі підмножини множини $D = \{\triangle, \square, \bigcirc\}$, які включають:
1) один елемент; 2) два елементи; 3) три елементи.

13.21. Множина A складається з розв'язків рівняння $\sin x = 0$, а множина B – з розв'язків рівняння $\cos x = 1$. Чи правильне твердження:
1) $A \subset B$; 2) $B \subset A$; 3) $A = B$?

13.22. Множина C складається з розв'язків рівняння $\sin x = 1$, а множина D – з розв'язків рівняння $\cos x = 0$. Чи правильне твердження:
1) $C \subset D$; 2) $D \subset C$; 3) $C = D$?

Життєва математика

13.23. Відомо, що нікотин однієї цигарки руйнує 25 мг вітаміну С. Якщо людина не палить, але перебуває в накуреному приміщенні 1 год, то це рівноцінно 4 викуреним цигаркам. Скільки вітаміну С втратила пані Марина, якщо вона пропрацювала в накуреному офісі 2,5 год?

13.24. Рейтингове агентство визначає рейтинг співвідношення «ціна—якість» електричних фенів для волосся. Рейтинг обчислюється на основі середньої ціни P і оцінок функціональності F, якості Q і дизайну D. Кожен окремий показник оцінюється експертами за 5-бальною шкалою цілими числами від 0 до 4. Підсумковий рейтинг обчислюється за формулою $R = 3(F + Q) + D - 0{,}01P$. У таблиці дано оцінки кожного показника для декількох моделей фенів. Визначте, яка модель має найменший рейтинг, а яка – найбільший.

Модель фена	Середня ціна, грн, P	Функціональність, F	Якість, Q	Дизайн, D
А	200	1	2	3
Б	250	2	2	4
В	300	4	3	2
Г	400	3	4	2

Підготуйтеся до вивчення нового матеріалу

13.25. У класі 12 юнаків і 10 дівчат. Скількома способами можна вибрати:

1) одного учня чи ученицю із цілого класу;
2) пару: юнака та дівчину?

13.26. Скількома способами можна вишикувати в ряд 3 дітей?

13.27. Скільки різних двоцифрових чисел можна скласти із цифр 1, 2, 3, 4, якщо в кожному із чисел цифри не повторюються?

Перевірте свою компетентність!

Завдання № 13

1. Укажіть найменший додатний період функції $y = \cos\frac{x}{4}$.

А	Б	В	Г	Д
2π	4π	6π	8π	16π

2. Знайдіть $f'(0)$, якщо $f(x) = 3x^2 - 5\sin x$.

А	Б	В	Г	Д
11	5	1	0	–5

3. Обчисліть $7^{\frac{1}{3}\log_7 8}$.

А	Б	В	Г	Д
2	7	8	64	512

4. Графік якої з функцій симетричний відносно початку координат?

А	Б	В	Г	Д
$y = x^2$	$y = \cos x$	$y = \sin x$	$y = \sqrt{x}$	$y = \dfrac{1}{x} + 1$

5. Яка з нерівностей має розв'язки?

А	Б	В	Г	Д
$5^x < -5$	$7^x \leqslant 0$	$x^2 + 1 < 0$	$2^x - 8 \geqslant 0$	$5^{x^2} < 1$

6. Спростіть вираз $\dfrac{1}{\cos^2\alpha} - \mathrm{tg}^2\,\alpha$.

А	Б	В	Г	Д
-1	1	$\cos^2\alpha$	$\sin^2\alpha$	$\mathrm{ctg}^2\alpha$

7. Розв'яжіть рівняння (1–4). Установіть відповідність між кожним рівнянням і кількістю його коренів (А–Д) на проміжку [–4; 4].

Рівняння

1 $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$

2 $\dfrac{x^2 + 5x - 6}{x - 1} = 0$

3 $\log_2 x = -3$

4 $\cos^2 x - \sin^2 x = -1$

Кількість коренів на проміжку [–4; 4]

А жодного

Б один

В два

Г три

Д чотири

	А	Б	В	Г	Д
1					
2					
3					
4					

8. Розв'яжіть рівняння $\log_2(x + 4) + \log_2(5 - x) = 3$. Якщо рівняння має кілька коренів, то у відповідь запишіть їх суму.

9. У двох сплавах цинк і мідь відносяться як 4 : 3 і 2 : 5 відповідно. На скільки кілограмів одного зі сплавів треба взяти більше, щоб одержати 20 кг нового сплаву з однаковим вмістом цинку й міді?

§ 14. ЕЛЕМЕНТИ КОМБІНАТОРИКИ. РОЗМІЩЕННЯ, ПЕРЕСТАНОВКИ, КОМБІНАЦІЇ

Нагадаємо, що з деякими елементами комбінаторики ви вже ознайомилися в попередніх класах.

Комбінаторика – розділ математики, у якому вивчають способи вибору та розташування елементів з деякої скінченної множини, які відповідають певним умовам. Вибрані (або вибрані та розташовані) групи елементів називають *сполуками*. Комбінаторика вивчає такі сполуки: *розміщення, перестановки, комбінації* (*сполучення*) тощо.

Перш ніж перейти до вивчення сполук, розглянемо деякі загальні питання.

1. Правило суми і правило добутку

З 9-го класу ви вже знаєте, що багато комбінаторних задач може бути розв'язано за допомогою двох важливих правил, які називаються відповідно *правило суми* і *правило добутку*.

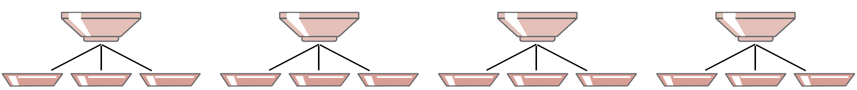
Приклад 1. У ящику є 5 білих і 4 чорних кульки. Вибрати одну з кульок: білу *або* чорну, очевидно, можна $5 + 4 = 9$ способами.

Узагальнюючи, маємо *правило суми*:

якщо деякий елемент A можна вибрати m способами, а елемент B — r способами (причому будь-який вибір елемента A відрізняється від вибору елемента B), то вибрати A *або* B можна $m + r$ способами.

Зрозуміло, що це правило також розповсюджується на три і більше елементів.

Приклад 2. У шкільній їдальні є вибір на обід із 4 перших страв *і* 3 других. Першу страву учень (учениця) може вибрати 4 способами і до кожної першої страви обрати другу страву 3 способами (мал. 14.1).



Мал. 14.1

Отже, учень (учениця) має $4 \cdot 3 = 12$ способів, щоб вибрати собі обід.

Узагальнюючи, маємо *правило добутку*:

якщо деякий елемент A можна вибрати m способами, а після кожного такого вибору інший елемент B можна вибрати (незалежно від вибору елемента A) r способами, то пару об'єктів A *і* B можна вибрати $m \cdot r$ способами.

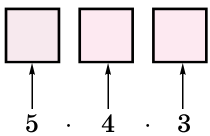
Це правило також розповсюджується на три і більше елементів.

Розглянемо більш складні задачі.

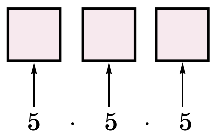
Задача 1. Скільки трицифрових чисел можна скласти із цифр 1, 2, 3, 4, 5, якщо в числі:
1) цифри не повторюються; 2) цифри повторюються?

Розв'язання. 1) Маємо 5 способів для сотень числа (мал. 14.2). Після того як місце сотень заповнено (наприклад, цифрою 1), для десятків залишається 4 способи, міркуючи далі, для одиниць – 3 способи. Отже, маємо: 5 способів, ***і*** після кожного з них – 4 способи, ***і*** після кожного з них – 3 способи. За правилом добутку маємо $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ чисел.

2) Якщо цифри в числі повторюються, то кожне з трьох місць можна заповнити 5 способами (мал. 14.3) і тоді всіх чисел буде $5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$.



Мал. 14.2



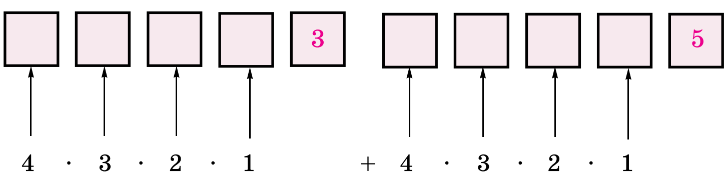
Мал. 14.3

Відповідь. 1) 60 чисел; 2) 125 чисел.

Зауважимо, що до введення комбінаторних правил подібні задачі ви могли розв'язати, лише перерахувавши всі числа, що задовольняють умову, а це безумовно є дуже громіздким процесом.

Задача 2. Скільки непарних п'ятицифрових чисел можна скласти із цифр 2, 3, 4, 5, 6, якщо в кожному із чисел цифри не повторюються?

Розв'язання. Непарне п'ятицифрове число можна отримати, якщо останньою цифрою буде 3 ***або*** 5. Чисел, у яких остання цифра 3, буде $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ (мал. 14.4), у яких остання 5, – також 24. За правилом суми непарних чисел буде $24 + 24 = 48$.



Мал. 14.4

Відповідь. 48.

2. Поняття факторіала

Важливим у комбінаториці є поняття *факторіала*.

***Факторіалом* числа n, де n – ціле невід'ємне число, називають добуток усіх натуральних чисел від 1 до n.**

Позначають це так: $n!$ (читають: «ен факторіал»). Отже,

$$\boldsymbol{n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n.}$$

За означенням приймають $0! = 1$.
Наприклад, $4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$.

Задача 3. Спростити вираз $\frac{5!}{4!}$.

Розв'язання. *I спосіб.* $\frac{5!}{4!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 5$.

II спосіб. $\frac{5!}{4!} = \frac{4! \cdot 5}{4!} = 5$.

Відповідь. 5.

3. Розміщення

Нехай дано множину X з n елементів $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n$.

***Розміщенням* з n елементів по m ($m \leqslant n$) називають будь-яку впорядковану підмножину Y множини X, причому дві такі підмножини вважають різними, якщо вони відрізняються складом або порядком розташування елементів.**

Приклад 3. Нехай дано множину $X = \{a, b, c\}$. Тоді по одному можна скласти такі розміщення: (a), (b), (c) – їх буде 3; по два можна скласти такі розміщення:

(a, b), (a, c), (b, c), (b, a), (c, a), (c, b) – їх буде 6;

по три можна скласти такі розміщення:

(a, b, c), (a, c, b), (b, a, c), (b, c, a), (c, a, b), (c, b, a) – їх буде 6.

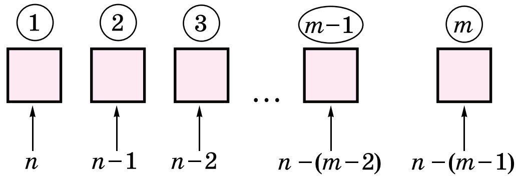
Кількість розміщень з n елементів по m позначають A_n^m (читають: «а з ен по ем»; A – перша літера від франц. *arrangement – розміщення*). Можна записати:

$$A_3^1 = 3; \; A_3^2 = 6; \; A_3^3 = 6.$$

Далі виведемо загальну формулу для знаходження A_n^m, де $m \leqslant n$.

Задача 4. Відомо m і n, де $m \leqslant n$. Обчислити A_n^m.

Розв'язання. Будемо складати впорядковані підмножини з m елементів. На перше місце можна поставити будь-який



Мал. 14.5

з n елементів (мал. 14.5) – маємо n способів. На друге – уже $(n-1)$ елемент, що залишиться після вибору першого, на третє – $(n-2)$ елементи, що залишилися після вибору перших двох, і т. д. На останнє m-е місце можна вибрати лише один з $n-(m-1)$ елементів, що залишилися після вибору $(m-1)$ попередніх. Використовуючи правило добутку, маємо:

$$A_n^m = n(n-1)(n-2)...(n-(m-2))(n-(m-1)).$$

Цю формулу можна запам'ятати за допомогою такого правила:

A_n^m – це добуток m натуральних чисел, починаючи з n, які записано в порядку спадання.

За отриманою формулою $A_3^2 = 3 \cdot 2 = 6$ (що збігається з раніше обчисленим); $A_7^3 = 7 \cdot 6 \cdot 5 = 210$.

Якщо отриманий для A_n^m вираз помножити і поділити на $(n-m)!$, то одержимо ще одну формулу для обчислення:

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}.$$

Задача 5. Розклад на день має 6 уроків. Визначити кількість можливих розкладів при виборі з 10 предметів за умови, що жоден предмет не повторюється в розкладі двічі.

Розв'язання. Зрозуміло, що таких розкладів буде $A_{10}^6 = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 151\,200$.

Відповідь. 151 200.

Задача 6. Скільки різних правильних дробів можна скласти із чисел 1, 3, 5, 7, 11, 13, 17, які використовують для запису чисельника і знаменника дробу?

Розв'язання. Дроби, у яких чисельник не дорівнює знаменнику, можна скласти A_7^2 способами, але лише половина з них правильні. Отже, шукана кількість дробів $\frac{1}{2} \cdot A_7^2 = \frac{1}{2} \cdot 7 \cdot 6 = 21$.

Відповідь. 21.

4. Перестановки

Перестановкою з n елементів називають будь-яку впорядковану множину з усіх цих елементів, причому дві такі множини вважають різними, якщо вони відрізняються між собою порядком розташування елементів.

Кількість перестановок з n елементів позначають P_n (читають: «пе з ен»; P – перша літера від франц. слова *permutation – перестановка*).

З означення випливає, що $P_n = A_n^n$. Тоді, враховуючи формулу для A_n^m та $0! = 1$, маємо $P_n = A_n^n = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = \frac{n!}{1} = n!$ Отже,

$$\boldsymbol{P_n = n!}$$

Задача 7. Скількома способами можна розставити на полиці 5 книжок?

Розв'язання. Очевидно, що шукана кількість способів дорівнює кількості перестановок з 5 елементів (книжок):

$$P_5 = 5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120.$$

Відповідь. 120.

Задача 8. Скільки різних п'ятицифрових чисел можна скласти із цифр 0, 2, 4, 6, 8, якщо в кожному числі жодна із цифр не повторюється?

Розв'язання. З п'яти цифр 0, 2, 4, 6, 8 можна утворити P_5 перестановок. Але ті перестановки, які починаються з нуля, не будуть записами п'ятицифрових чисел, таких перестановок – P_4. Отже, шукана кількість п'ятицифрових чисел дорівнює:

$$P_5 - P_4 = 5! - 4! = 4!(5 - 1) = 24 \cdot 4 = 96.$$

Відповідь. 96.

5. Комбінації (сполучення)

Нехай дано множину X з n елементів $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n$.

Комбінацією (сполученням) з n елементів по m ($m \leqslant n$) називають будь-яку підмножину Y множини X, причому дві такі підмножини вважають різними, якщо вони відрізняються складом.

Кількість комбінацій з n елементів по m позначають C_n^m (читають: «це з ен по ем»; C – перша літера від лат. *combinare – сполучати* та франц. *combinaison – комбінація*).

Задача 9. Відомо m і n, де $m \leqslant n$. Обчислити C_n^m.

Розв'язання. Спочатку порахуємо впорядковані підмножини з n елементів по m, а їх, як відомо, A_n^m. Однак для обчислення числа комбінацій нас не цікавить порядок розташування елементів у кожній такій підмножині. Елементи кожної підмножини можна переставити між собою P_m способами. Отже, число C_n^m у P_m разів менше за число A_n^m, тобто:

$$C_n^m = \frac{A_n^m}{P_m} = \frac{n!}{(n-m)!} : m! = \frac{n!}{m!(n-m)!}.$$ Отже,

$$\boldsymbol{C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}}.$$

Задача 10. У вазі 7 червоних і 5 білих троянд. Скількома способами з вази можна вибрати: 1) 3 троянди; 2) 2 червоні й 1 білу троянду?

Розв'язання. 1) Оскільки порядок вибору не має значення, то вибрати 3 троянди з 12 можна C_{12}^3 способами:

$$C_{12}^3 = \frac{12!}{3!(12-3)!} = \frac{9! \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12}{3! \cdot 9!} = \frac{10 \cdot 11 \cdot 12}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 220.$$

2) Дві червоні троянди можна вибрати C_7^2 способами, а одну білу – C_5^1 способами. Тому дві червоні й одну білу троянду можна вибрати $C_7^2 \cdot C_5^1$ способами. Маємо:

$$C_7^2 \cdot C_5^1 = \frac{7!}{2!(7-2)!} \cdot \frac{5!}{1!(5-1)!} = \frac{5! \cdot 6 \cdot 7}{2! \cdot 5!} \cdot \frac{4! \cdot 5}{1 \cdot 4!} = 21 \cdot 5 = 105.$$

Відповідь. 1) 220; 2) 105.

Якщо в комбінаторній задачі потрібно вибрати m елементів з n, то важливим є питання: треба враховувати порядок розташування елементів чи ні? Від цього залежить, яку формулу (комбінаторну схему) слід використати.

Якщо порядок розташування елементів має значення, то маємо розміщення, якщо ні – комбінації.

Розглянемо задачу-схему.

У класі навчається 30 дітей. Скількома способами із цього класу можна вибрати…	
…старосту і його заступника?	…двох чергових?
Обов'язки різні! **Порядок має значення** $A_{30}^2 = 30 \cdot 29 = 870$	Обов'язки однакові! **Порядок не має значення** $C_{30}^2 = \frac{30!}{2!(30-2)!} = \frac{28! \cdot 29 \cdot 30}{2 \cdot 28!} = \frac{870}{2} = 435$

А ще раніше...

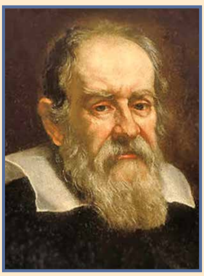
Задачі, які можна віднести до комбінаторних, розглядалися з давніх-давен.

Перші згадування про питання, близькі до комбінаторних, траплялися ще в китайських рукописах XIII ст. до н. е. У Стародавній Греції комбінаторні задачі починав розглядати в IV ст. до н. е. філософ Ксенократ, який підрахував число складів у словах. У II ст. до н. е. великий вплив мала містика й астрологія, тому багато робіт того часу присвячено містичному тлумаченню цифр і чисел.

У III ст. сірійський філософ Порфирій склав для класифікації комбінаторних понять особливу схему, яка отримала назву «древо Порфирія». У VIII ст. араби знайшли формулу, яка відома під історичною назвою «біном Ньютона», причому коефіцієнти цієї формули є, висловлюючись сучасною мовою, кількістю комбінацій. У XII ст. італійський математик Фібоначчі опублікував ряд робіт, серед яких траплялися й комбінаторні задачі.

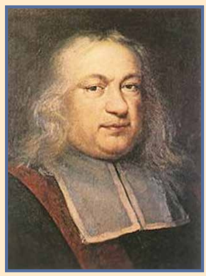
Значний поштовх до розвитку комбінаторики надали азартні ігри, зокрема гра в кості. Цими питаннями займалися такі математики XVI ст., як Дж. Кардано, Н. Тарталья, Г. Галілей.

У XVII ст. внесок у розвиток комбінаторики зробили Б. Паскаль, П. Ферма, Г. Лейбніц і Л. Ейлер.



Г. Галілей (1564–1642)

Б. Паскаль (1623–1662)



П. Ферма (1601–1665)

Сучасні комбінаторні задачі високого рівня пов'язані з іншими галузями математики: визначниками, скінченними геометріями, групами, математичною логікою тощо.

Невід'ємним є зв'язок комбінаторних задач із задачами теорії ймовірностей, який розглянемо на наступних сторінках підручника.

- Що вивчає комбінаторика? - Сформулюйте правило суми і правило добутку. - Що таке факторіал числа? - Що називають розміщенням? - Запишіть формули для знаходження кількості розміщень A_n^m. - Сформулюйте правило, за яким знаходять кількість розміщень. - Що називають перестановками? - Запишіть формулу для знаходження кількості перестановок P_n. - Що називають комбінаціями? - Запишіть формулу для знаходження кількості комбінацій C_n^m.

Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

1 Обчисліть (**14.1–14.2**):

14.1. 1) A_4^2; 2) A_5^3; 3) P_4; 4) P_6; 5) C_5^2; 6) C_7^4.

14.2. 1) A_5^2; 2) A_4^3; 3) P_3; 4) P_5; 5) C_5^3; 6) C_7^5.

Утворіть усі перестановки множини (**14.3–14.4**):

14.3. 1) $A = \{a, b\}$; 2) $B = \{*, \triangle, \square\}$.

14.4. 1) $A = \{1, 2\}$; 2) $B = \{?, !, \bigcirc\}$.

14.5. Скільки чотирицифрових чисел можна записати за допомогою цифр 5, 6, 7, 8, якщо цифри в числі не повторюються?

14.6. Скільки трицифрових чисел можна записати за допомогою цифр 1, 2, 3, якщо цифри в числі не повторюються?

14.7. На тарілці лежать 6 яблук і 9 слив. Скількома способами з тарілки можна взяти:

1) один фрукт; 2) одне яблуко і одну сливу?

14.8. У класі 12 юнаків і 16 дівчат. Скількома способами можна вибрати:

1) одного учня чи ученицю із цього класу;
2) пару: юнака та дівчину?

2 Скоротіть дріб (**14.9–14.10**):

14.9. 1) $\frac{8!}{5!}$; 2) $\frac{P_3}{P_7}$; 3) $\frac{A_7^2}{A_6^3}$; 4) $\frac{C_5^3}{C_6^4}$.

14.10. 1) $\frac{3!}{5!}$; 2) $\frac{P_8}{P_6}$; 3) $\frac{A_8^3}{A_6^2}$; 4) $\frac{C_7^3}{C_5^2}$.

Обчисліть (**14.11–14.12**):

14.11. 1) $\frac{P_5 + P_4}{P_4}$; 2) $\frac{A_7^3 + A_7^4}{A_7^2}$; 3) $\frac{A_8^3}{P_3}$; 4) $C_{2000}^{2000} + C_{18}^1$.

14.12. 1) $\frac{P_4 - P_3}{P_3}$; 2) $\frac{A_5^2 + A_5^4}{A_5^3}$; 3) $\frac{A_7^4}{P_2}$; 4) $C_{27}^1 + C_{2010}^{2010}$.

14.13. Скількома способами можна вибрати пару з літер на позначення одного голосного й одного приголосного звука у слові «яблуко»?

14.14. Скількома способами можна вибрати пару з літер на позначення одного голосного й одного приголосного звука у слові «слива»?

14.15. Скількома способами можна вишикувати в ряд 5 дітей?

14.16. 12 учасників шахового турніру грають у залі, де є 6 столів. Скількома способами можна розмістити шахістів за столами, якщо учасники всіх партій і колір фігур кожного учасника відомі?

14.17. Скількома способами із 6 членів президії можна вибрати голову і секретаря зборів?

14.18. У секції легкої атлетики займаються 7 спортсменок. Скількома способами між ними можна розподілити етапи естафети 4×100 м (тобто кожна із чотирьох атлеток, що бере участь в естафеті, біжить свій етап: перший, або другий, або третій, або четвертий)?

14.19. У групі туристів 16 осіб. Скількома способами можна сформувати з них групу з 3 туристів для екскурсії?

14.20. Скількома способами з 20 учнів та учениць класу можна обрати чотирьох для участі у святковому концерті?

14.21. На колі розміщено 10 точок. Скільки існує трикутників, вершинами яких є ці точки?

14.22. На колі розміщено 15 точок. Скільки прямих можна провести через ці точки?

14.23. Гральний кубик підкидають тричі. Скільки різних послідовностей чисел можна при цьому отримати?

14.24. Монету підкидають чотири рази. Скільки різних послідовностей випадання аверса та реверса при цьому можна отримати?

14.25. Скільки можна скласти різних чотирицифрових чисел, у запису яких є тільки непарні цифри, якщо цифри в числі:

1) не повторюються; 2) можуть повторюватися?

14.26. Скільки можна скласти різних трицифрових чисел, у запису яких є цифри 1, 2, 3, 4, 5, якщо цифри в числі:

1) не повторюються; 2) можуть повторюватися?

3 Обчисліть (**14.27–14.28**):

14.27. 1) $\frac{1}{P_6} - \frac{1}{P_5}$; 2) $\frac{1}{P_7} - \frac{18}{P_9}$.

14.28. 1) $\frac{1}{P_5} - \frac{1}{P_4}$; 2) $\frac{1}{P_6} - \frac{24}{P_8}$.

Розв'яжіть рівняння (**14.29–14.30**):

14.29. 1) $\frac{P_{x+2}}{P_x} = 42$; 2) $C_x^2 = 45$.

14.30. 1) $P_{x+2} = 30P_x$; 2) $A_x^2 = 132$.

14.31. Скількома способами можна розкласти в ряд 2 білі намистини, чорну, червону і блакитну, якщо білі намистини розташовуються з двох кінців ряду?

14.32. Скількома способами на книжній полиці можна розмістити підручники із 6 різних предметів так, щоб підручник з алгебри стояв крайнім праворуч?

14.33. Скільки різних шестицифрових чисел можна скласти із цифр 0, 1, 3, 5, 7, 9, якщо в кожному числі цифри не повторюються?

14.34. Скільки різних чотирицифрових чисел можна скласти із цифр 0, 1, 2, 3, якщо в кожному числі цифри не повторюються?

14.35. Скільки різних правильних нескоротних дробів можна скласти із чисел 2, 3, 5, 7, 15, де в кожний дріб входить два різних числа?

14.36. Скількома способами групу з 8 учнів можна розподілити для участі у двох олімпіадах, якщо в олімпіаді з математики беруть участь 5 учнів, а з фізики – 3?

14.37. Скількома способами 8 пасажирів потяга можна розподілити між двома купе по 4 пасажири?

14.38. Скількома способами можна вибрати 2 блокноти і 3 олівці з 5 різних блокнотів і 8 олівців?

14.39. Скількома способами можна вибрати 2 DVD-диски з іграми і 4 з фільмами із 6 різних дисків з іграми і 8 з фільмами?

14.40. У турнірі «Кубок чемпіонів» грає 16 шахісток, кожна з яких провела партію з кожною із суперниць. Скільки було зіграно партій у цьому турнірі?

14.41. У прем'єр-лізі з футболу грає 12 команд, кожна з яких проводить по дві зустрічі з кожним із суперників. Скільки матчів буде проведено у прем'єр-лізі?

4 Розв'яжіть нерівність **(14.42–14.43)**:

14.42. 1) $P_{x+1} \leqslant 30P_{x-1}$; 2) $A_x^2 > 90$.

14.43. 1) $P_{x+2} > 20P_x$; 2) $C_x^2 \leqslant 28$.

14.44. Доведіть рівності, які описують *основні властивості числа комбінацій*:

1) $C_n^m = C_n^{n-m}$; 2) $C_{n+1}^{m+1} = \dfrac{n+1}{m+1}C_n^m$; 3) $C_n^m + C_n^{m-1} = C_{n+1}^m$.

Скільки різних послідовностей літер можна одержати, переставляючи всі літери слова **(14.45–14.46)**:

14.45. 1) «колос»; 2) «перерва»?

14.46. 1) «середа»; 2) «золото»?

14.47. Скільки різних неправильних дробів можна скласти, використовуючи в чисельнику і знаменнику числа 1, 3, 5, 7, 11, 13, за умови, що кожне число може входити у дріб один або два рази?

14.48. Скільки різних чотирицифрових чисел можна скласти із цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, якщо цифри в числі не повторюються?

14.49. Скільки різних трицифрових чисел можна скласти із цифр 0, 2, 4, 6, 8, якщо цифри в числі не повторюються?

14.50. Скількома способами 8 тем рефератів з історії України можна розподілити між 4 учнями та ученицями, якщо кожен з них готує по 2 реферати?

14.51. Скількома способами 6 тістечок можна розподілити між трьома дітьми так, щоб кожен отримав по 2 тістечка?

14.52. Скільки чотирицифрових чисел, кратних п'яти, можна скласти із цифр 0, 1, 5, 6, якщо в числі цифри не повторюються?

14.53. Скільки непарних п'ятицифрових чисел можна скласти із цифр 1, 2, 3, 4, 5, якщо в числі цифри не повторюються?

14.54. У вазі 10 білих і 6 рожевих троянд. Скількома способами можна вибрати з вази:

1) три квітки;
2) три квітки одного кольору;
3) три квітки так, щоб серед них були як білі, так і рожеві?

Життєва математика

14.55. Михайло щоранку пробігає одну й ту саму дистанцію. У будні він пробігає її зі швидкістю 10 км/год за 28 хв. У вихідні він проводить посилене тренування та пробігає цю дистанцію за 20 хв. З якою швидкістю рухається Михайло у вихідні?

14.56. Марічка та Данило вирішили влітку допомогти своїм родинам і зайнялися бізнесом: купили на 1000 грн яблука, переробили їх на сухофрукти, які реалізували через торгову точку, яка сплачує податки, на суму 3000 грн. Під час переробки яблук витрати переробки становили 500 грн, а витрати збуту – 300 грн.

1) Знайдіть суму податку на додану вартість (ПДВ) за ставкою 20 %, що мають сплатити діти державі.

2) Яким є дохід, отриманий після продажу сухофруктів?

3) Який прибуток після сплати ПДВ отримали діти?

4) Знайдіть суми податку на прибуток підприємства (ППП) за ставкою 18 %, що мають сплатити діти.

5) Знайдіть суму грошей, які одержать діти після сплати всіх податків – чистий прибуток.

Перевірте свою компетентність!

Завдання № 14

1. Розв'яжіть нерівність $\log_{0,8}x > \log_{0,8}5$.

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty; +\infty)$	$(5; +\infty)$	$[5; +\infty)$	$(-\infty; 5)$	$(0; 5)$

2. Графік якої з функцій проходить через точку $A(-1; 3)$?

А	Б	В	Г	Д
$y = 2x - 1$	$y = 3^x$	$y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$	$y = 3x$	$y = -1$

3. Скільки коренів, що належать проміжку $(-\pi; \pi)$, має рівняння $\frac{1}{5}\operatorname{tg} x + 0,2 = 0$?

А	Б	В	Г	Д
0	1	2	3	безліч

4. Обчисліть $\log_{1,5} 10 \cdot \lg \sqrt[3]{1,5}$.

А	Б	В	Г	Д
$\frac{1}{3}$	1	1,5	3	10

5. Обчисліть $\sin^2(\log_5 2) + \cos^2(\log_5 2)$.

А	Б	В	Г	Д
1	2	3	4	5

6. Скільки коренів має рівняння $3^{|x|-1} = \frac{1}{3}$?

А	Б	В	Г	Д
0	1	2	3	безліч

7. Установіть відповідність між нерівністю (1–4) та множиною її розв'язків (А–Д).

Нерівність		*Множина її розв'язків*	
1	$3^x \leqslant 27$	А	$(-\infty;\ -3)$
2	$\left(\frac{1}{4}\right)^x > 64$	Б	$(-\infty;\ 3]$
3	$2^{x+1} \geqslant 16$	В	$(-\infty;\ 3)$
4	$\left(\frac{1}{5}\right)^{x-3} > 1$	Г	$(-3;\ +\infty)$
		Д	$[3;\ +\infty)$

	А	Б	В	Г	Д
1					
2					
3					
4					

8. Обчисліть суму перших 16 членів арифметичної прогресії a_n, у якої $a_n = 2n - 3$.

9. У ящику 5 білих і кілька чорних кульок. Якою найменшою повинна бути кількість чорних кульок, щоб імовірність витягнути навмання з ящика чорну кульку була більшою за 0,6?

§ 15. ВИПАДКОВИЙ ДОСЛІД І ВИПАДКОВА ПОДІЯ. ВІДНОСНА ЧАСТОТА ПОДІЇ. ЙМОВІРНІСТЬ ПОДІЇ

Будь-яка точна наука вивчає не самі явища, що відбуваються у природі, а їх математичні моделі. Однак є велика кількість задач, для розв'язування яких потрібно враховувати і випадкові фактори, у результаті яких явище може як відбутися, так і не відбутися. Такі *явища* називають *випадковими*.

Теорія ймовірностей – математична наука, що вивчає закономірності випадкових явищ.

З основами теорії ймовірностей ви вже ознайомилися в 9-му класі.

1. Випадковий дослід і випадкова подія. Вірогідна подія. Неможлива подія

Нехай проводиться певний дослід (експеримент, спостереження, випробування тощо), підсумок якого передбачити неможливо. Такі *досліди* в теорії ймовірностей називають *випадковими*. При цьому доцільно проводити лише такі досліди, які можна повторити, хоча б теоретично, за одних і тих самих умов довільну кількість разів.

До випадкових дослідів належать: підкидання монети чи грального кубика, купівля виграшного лотерейного білета, стрільба по мішені тощо.

Отже,

випадковий дослід **– це дослід (експеримент, спостереження, випробування), результат якого залежить від випадку і який можна повторити багато разів за одних і тих самих умов.**

Результатом випадкового досліду є *випадкова подія*.

Випадкова подія **– це подія, яка за одних і тих самих умов може відбутися, а може і не відбутися.**

Прикладами випадкових подій є «випадання одиниці під час підкидання грального кубика», «випадання реверса під час підкидання монети», «виграш 10 грн під час лотерейного розіграшу» тощо. Події «після нагрівання води до 100° вона кипить», «при нагріванні дроту його довжина збільшується» є закономірними, тому їх не можна назвати випадковими.

Випадкові події зазвичай позначають великими латинськими літерами: A, B, C, D, ...

Розглянемо задачу.

Задача 1. У шухляді є білі та блакитні носові хустинки. З неї навмання вибирають одну хустинку. Які з подій при цьому можуть відбутися:

A – вийнято білу хустинку; C – вийнято зелену хусинку;
B – вийнято блакитну хустинку; D – вийнято хустинку?

Розв'язання. Оскільки із шухляди можна вийняти лише те, що в ній міститься, то вийняти білу або блакитну хустинку можна, а зелену – ні. Можна також стверджувати, що будь-який предмет, який навмання виймають із шухляди, буде хустинкою, оскільки там окрім хустинок нічого немає. Отже, події A і B можуть відбутися (а можуть і не відбутися); подія C не може відбутися, а подія D обов'язково відбудеться.

Відповідь. A, B, D.

Подію**, яка за даних умов обов'язково відбудеться, називають *вірогідною*.**

Подію**, яка за даних умов не може відбутися, називають *неможливою*.**

У задачі 1 події A і B – випадкові, D – вірогідна подія, C – неможлива подія.

2. Відносна частота події. Статистична ймовірність події

Нехай проводиться деякий випадковий дослід, наприклад стрільба по мішені певного стрільця. Як можна оцінити ймовірність влучення стрільця за одних і тих самих незмінних умов?

Для того щоб дати відповідь на поставлене запитання, спочатку розглянемо поняття *частоти* і *відносної частоти події*.

Якщо за незмінних умов проведено n випадкових дослідів і в $n(A)$ випадках випадкова подія A відбулася, то число $n(A)$ називають *частотою події A*, а відношення $\frac{n(A)}{n}$ – *відносною частотою події A*.

Приклад 1. Дослід, який полягає в підкиданні грального кубика, проведено 150 разів. У результаті досліду випадкова подія A – «випадання шістки» відбулася 24 рази. Число 24 – частота події A, а відношення $\frac{24}{150} = \frac{4}{25} = 0{,}16$ – відносна частота події A.

Відносна частота події змінюється, якщо змінювати кількість дослідів або виконувати іншу серію дослідів за таких самих умов.

Приклад 2. У різні роки різні вчені проводили дослід, який полягав у підкиданні монети велику кількість разів, і розглядали подію A – «випадання аверса». Дані цих дослідів систематизовано у вигляді таблиці, яка впорядкована в порядку зростання кількості дослідів.

№	Дослідник	Роки життя	Кількість підкидання монети, n	Кількість випадання аверса, $n(A)$	Відносна частота, $\frac{n(A)}{n}$
1	Ж. Бюффон	1707–1788	4040	2048	0,5069
2	Де Морган	1806–1871	4092	2048	0,5005
3	В. Феллер	1906–1970	10 000	4979	0,4979
4	К. Пірсон	1857–1936	12 000	6019	0,5016
5	У. Джевонс	1835–1882	20 480	10 379	0,5068
6	К. Пірсон	1857–1936	24 000	12 012	0,5005
7	В. Романовський	1879–1954	80 640	40 151	0,4979

Хоча безумовно монети в дослідах різних учених були різними, але сам дослід і подію, які вони розглядали, можна вважати одними і тими самими. Ці досліди, які проводили різні вчені в різні епохи в різних країнах, дають приблизно один і той самий результат: відносна частота події A наближається до числа 0,5. Це число 0,5 називають *статистичною ймовірністю події*.

Якщо під час проведення досить великої кількості випадкових дослідів, у кожному з яких подія A може відбутися або не відбутися, значення відносної частоти події A наближається до деякого певного числа, то це число називають *статистичною ймовірністю події A*.

У попередніх класах ви ознайомилися з *класичним означенням ймовірності* (відомості про яке повторимо і розширимо в наступному параграфі). Нагадаємо, що ймовірність прийнято позначати латинською літерою p (перша літера від франц. *probabilité* та лат. *probabilitas* – *можливість*, *імовірність*). Отже, можна записати:

$$p(A) = 0,5 \text{ або } p = 0,5.$$

Якщо згадати класичне означення ймовірності, то в цьому випадку ймовірність події A також буде дорівнювати 0,5. Отже, можна зробити висновок, що поняття статистичної ймовірності події узгоджується з класичним означенням ймовірності.

Зауважимо, що

ймовірність випадкової події можна знайти з досить великою точністю, якщо випадковий дослід проводити велику кількість разів. Чим більше проведених дослідів, тим ближче значення відносної частоти випадкової події до ймовірності цієї події.

Тепер можна повернутися до запитання, поставленого на початку цього пункту. Для того щоб оцінити ймовірність влучення стрільця в мішень (подія A), потрібно, щоб він зробив достатньо велику кількість пострілів (за одних і тих самих умов). Тоді відносну частоту події A можна буде вважати ймовірністю влучення стрільця в мішень. Нехай, наприклад, зроблено протягом певного періоду 1000 пострілів, з яких влучних – 781. Тоді відносна частота $\frac{781}{1000} = 0,781$ може вважатися ймовірністю влучення даного стрільця в дану мішень.

Якщо відома ймовірність події A, то можна приблизно оцінити, скільки разів подія A відбудеться, якщо зробити певну кількість дослідів.

Задача 2. Ймовірність влучення стрільця в мішень дорівнює 0,781. Скільки приблизно буде влучних пострілів цього стрільця в серії з 50 пострілів?

Розв'язання. Нехай в серії з 50 пострілів – x влучних. Тоді $\frac{x}{50}$ – відносна частота. Можна вважати, що відносна частота приблизно дорівнює ймовірності, тоді $\frac{x}{50} \approx 0{,}781$; $x \approx 39$.

Відповідь. Приблизно 39 влучних пострілів.

3. Ймовірність вірогідної, неможливої та довільної випадкової події

Вірогідну подію часто позначають літерою U. Оскільки вірогідна подія обов'язково відбувається в результаті випадкового досліду, то можна стверджувати, що коли проведемо дослід n разів, подія U відбудеться n разів. Маємо:

$$p(U) = \frac{n(U)}{n} = \frac{n}{n} = 1.$$

Отже,

ймовірність вірогідної події дорівнює одиниці: $p(U) = 1$.

Неможливу подію часто позначають літерою V. Неможлива подія не може відбутися в результаті випадкового досліду. Тому, якщо проводити дослід n разів, подія V не відбудеться жодного разу. Маємо:

$$p(V) = \frac{n(V)}{n} = \frac{0}{n} = 0.$$

Отже,

ймовірність неможливої події дорівнює нулю: $p(V) = 0$.

Приклад 3. Подія U – «випадання числа, меншого від 7, під час підкидання грального кубика» – вірогідна; $p(U) = 1$. Подія V – «випадання числа, більшого за 6, під час підкидання грального кубика» – неможлива; $p(V) = 0$.

Якщо проведено n дослідів, то довільна випадкова подія A може відбутися $n(A)$ разів, де $n(A)$ задовольняє, очевидно, умову $0 \leqslant n(A) \leqslant n$. Тоді відносну частоту події A може бути оцінено так: $\frac{0}{n} \leqslant \frac{n(A)}{n} \leqslant \frac{n}{n}$, тобто $0 \leqslant \frac{n(A)}{n} \leqslant 1$, а тому ймовірність події A оцінюється так само: $0 \leqslant p(A) \leqslant 1$.

Отже,

ймовірність $p(A)$ *довільної випадкової події* A *задовольняє умову* $0 \leqslant p(A) \leqslant 1$.

Якщо ймовірність події A дорівнює нулю або наближається до нуля, то ця подія або неможлива, або відбувається дуже рідко. Таку подію можна вважати *практично неможливою*.

Якщо ймовірність події A дорівнює одиниці або наближається до одиниці, то ця подія або вірогідна, або відбувається дуже часто. Таку подію вважатимемо *практично вірогідною*.

Приклад 4. Подія C – «виграш 1 000 000 гривень у лотереї» – практично неможлива, а подія D – «нова куплена кулькова ручка пише» – практично вірогідна.

А ще раніше...

Ще в давні часи люди помітили, що кілька мисливців можуть влучити у звіра за допомогою своїх списів, якщо кинуть їх одночасно, з більшою ймовірністю, ніж один мисливець. Безумовно, цей висновок був інтуїтивний, а не науковий, і ґрунтувався на спостереженнях і досвіді.

Перші цікаві задачі з теорії ймовірностей виникли в області азартних ігор.

У 1494 р. італійський математик Л. Пачіолі опублікував працю з математики, де розглянув таку задачу: «Два гравці домовилися грати в кості до моменту, коли одному з них вдасться виграти m партій. Але гру було перервано після того, як перший виграв a ($a < m$), а другий – b ($b < m$) партій. Як справедливо розподілити ставку?»

Л. Пачіолі (1454–1514)

Сам Пачіолі не знайшов правильного розв'язання цієї задачі (він пропонував розподілити ставку у відношенні a : b, але не врахував кількості партій m, яку треба виграти).

Інший італійський математик Дж. Кардано (1501–1576) через 50 років показав, що розв'язання Пачіолі було неправильне, проте розв'язання, яке він сам запропонував, також виявилось помилковим.

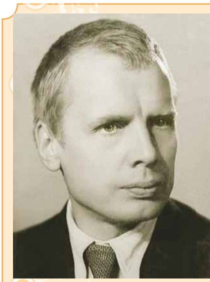
Тільки в 1654 р., у результаті листування між двома видатними французькими математиками Б. Паскалем (1623–1662) і П. Ферма (1601–1665), цю задачу було розв'язано в загальному вигляді.

Важливий внесок у теорію ймовірностей зробив швейцарський математик Я. Бернуллі (1654–1705): він довів закон великих чисел у найпростішому випадку незалежних випробувань у книжці «Аналітична теорія ймовірностей».

У 1718 р. англійський математик А. Муавр (1667–1754) опублікував книжку «Учення про випадки», у якій дослідив закономірності, що часто можна спостерігати у випадкових явищах.

Уперше основи теорії ймовірностей виклав французький математик П. Лаплас (1749–1827).

У подальшому теорія ймовірностей розвивалася завдяки працям відомих вчених: С. Пуассона (1781–1840), П.Л. Чебишова (1821–1894), А.А. Маркова (1856–1922), О.М. Ляпунова (1857–1918).



Б.В. Гнєденко (1912–1996)

Й.І. Гіхман (1918–1985)

А.В. Скороход (1930–2011)

М.Й. Ядренко (1932–2004)

Свій внесок у розвиток теорії ймовірностей зробили й українські вчені: Б.В. Гнєденко, Й.І. Гіхман, А.В. Скороход, М.Й. Ядренко.

● Що вивчає теорія ймовірностей? ● Що таке випадковий дослід? ● Що таке випадкова подія? ● Яку подію називають вірогідною, а яку – неможливою? ● Що називають частотою події і що – відносною частотою події? ● Що називають статистичною ймовірністю події? ● Як можна знайти ймовірність події? ● Чому дорівнює ймовірність вірогідної події і чому – ймовірність неможливої події? ● У яких межах знаходиться величина $p(A)$ – ймовірність випадкової події A? ● Яку подію вважають практично неможливою і яку – практично вірогідною?

Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

1

15.1. (*Усно.*) Які з подій є випадковими:
1) під час підкидання грального кубика випаде 4 очки;
2) за температури 0 °С вода замерзне;
3) виграш за лотерейним білетом складе 10 грн;
4) наступним днем після 1 січня буде 2 січня;
5) прізвище навмання вибраного одинадцятикласника починатиметься з літери «Л»;
6) довжина кола, радіус якого 10 см, дорівнюватиме 20π см?

15.2. (*Усно.*) Які з подій – вірогідні, а які – неможливі:
1) сонце зійде на сході;
2) під час підкидання грального кубика випаде число очок, кратне 13;
3) навмання вибране трицифрове число, складене із цифр 2, 3, 4, виявиться більшим за 200;
4) двоцифрове число, складене із цифр 3 і 4, кратне числу 3;
5) випаде білий сніг;
6) кількість днів навмання вибраного місяця буде не меншою за 32?

15.3. Які з подій випадкові, вірогідні, неможливі:
1) виграти партію в теніс у рівного вам суперника;
2) навмання вибраний слон буде літати;
3) поява очок, сума яких більша за 12, під час підкидання двох гральних кубиків;
4) запізнення потяга Київ–Львів;
5) 7 травня наступного року буде сонячно;
6) наступним днем після середи буде четвер;
7) наступним днем після четверга буде середа;
8) день народження людини, яку зустріли, 30 вересня;
9) день народження людини, яку зустріли, 31 вересня;
10) витягнути білу намистину з коробки, у якій білі та червоні намистини?

15.4. Наведіть по два приклади вірогідної, неможливої, випадкової події.

2 Перемалюйте таблицю в зошит і для кожного досліду вкажіть приклад вірогідної, неможливої, випадкової події **(15.5–15.6)**:

15.5.

№	Дослід	Вірогідна подія	Неможлива подія	Випадкова подія
1	Витягування кульки з коробки із зеленими та синіми кульками			
2	Відривання листка у відривному календарі			
3	Витягування карти з колоди карт			
4	Складання двоцифрового числа із цифр 4 і 5			

15.5.

№	Дослід	Вірогідна подія	Неможлива подія	Випадкова подія
1	Витягування шоколадної цукерки з коробки, яка містить цукерки із чорного та молочного шоколаду			
2	Складання двоцифрового числа із цифр 7 і 8			
3	Визначення дня народження деякої людини			
4	Визначення кількості днів навмання вибраного року			

15.7. Випадковий дослід «підкидання грального кубика» проведено 400 разів. Результати досліду занесено в таблицю. Перемалюйте її в зошит і обчисліть відносну частоту випадання кожного окремого числа.

Число	1	2	3	4	5	6
Кількість випадання числа	66	64	70	68	72	60
Відносна частота випадання числа						

15.8. Було виконано 5 серій по 100 підкидань монети в кожній. Результати досліду занесено в таблицю. Перемалюйте її в зошит і обчисліть відносну частоту події A в кожній із серій.

Серія	1	2	3	4	5
Випадання аверса (подія A)	46	52	48	50	56
Відносна частота події A					

15.9. Відомо, що в партії із 2000 батарейок трапляються 6 бракованих. Яка ймовірність купити браковану батарейку з такої партії?

15.10. У партії, виробленій заводом, що налічує 20 000 деталей, є 30 бракованих. Яка ймовірність того, що навмання взята з партії деталь буде бракованою?

15.11. Яка ймовірність події «наступним днем після...»:

1) «...30 липня буде 1 серпня»;
2) «...понеділка буде вівторок»?

15.12. Яка ймовірність події «наступним днем після...»:

1) «...30 квітня буде 1 травня»;
2) «...вівторка буде понеділок»?

3 **15.13.** (*Усно.*) Стрілець виконав два постріли по мішені: один раз влучив, а другий – ні. Чи можна стверджувати, що для цього стрільця ймовірність влучення в мішень за даних умов дорівнює 0,5? Чому?

15.14. Для того щоб визначити, який колір волосся в жителів міста трапляється частіше, а який – рідше, було проведено дослід, який полягав у такому. Кілька дослідників розійшлися в різні частини міста і записували колір волосся кожного десятого зустрінутого жителя міста. Результати зібрали й занесли до таблиці.

Колір волосся	Шатени	Блондини	Брюнети	Руді
Кількість людей	212	119	111	44

Оцініть (з точністю до сотих), що обраний навмання житель міста:

1) шатен; 2) брюнет;
3) не блондин; 4) не рудий.

15.15. За умовою попередньої задачі оцініть (з точністю до сотих), що обраний навмання житель міста:

1) рудий; 2) блондин;
3) не шатен; 4) не брюнет.

15.16. (*Практичне завдання.*) Виберіть деякий текст українською мовою, позначте в ньому будь-які п'ять рядків поспіль. Обчисліть відносну частоту в цих рядках літери «ф» та літери «о» та порівняйте їх.

15.17. (*Практичне завдання.*) Виберіть деякий текст українською мовою, позначте в ньому будь-які десять рядків поспіль. Обчисліть відносну частоту в цих рядках літери «п» та літери «ч» та порівняйте їх.

15.18. (*Усно.*) На основі задач 15.16–15.17 дайте відповідь на запитання: чому на клавіатурах до комп'ютерів літери «о» та «п» розташовані ближче до центра, а літери «ф» та «ч» – ближче до краю?

15.19. Було перевірено 1000 деталей, з яких 4 виявилися бракованими. 1) Скільки приблизно бракованих деталей буде в партії з 2500 деталей? 2) Скільки приблизно деталей у партії, якщо серед них виявилося 6 бракованих?

15.20. Серед 200 опитаних жителів міста 196 мали мобільний телефон. 1) Скільки приблизно мобільних телефонів буде в 700 опитаних жителів цього міста? 2) Скільки приблизно було опитано жителів міста, якщо серед них кількість людей, що мала мобільний телефон, дорівнювала 686?

4

15.21. Відомо, що деяка баскетболістка влучає в кошик під час штрафного кидка з ймовірністю, більшою за 0,8, але меншою ніж 0,82. Скільки приблизно виконано штрафних кидків під час тренування, якщо баскетболістка мала 5 промахів?

15.22. Відомо, що деякий стрілець влучає в мішень з імовірністю, більшою за 0,88, але меншою ніж 0,9. Скільки приблизно виконано пострілів під час тренування, якщо стрілець мав 3 промахи?

Життєва математика

15.23. 1) У деякій територіальній громаді 80 000 осіб. Відсоток працездатних осіб становить приблизно 67,5 %. Скільки приблизно працездатних осіб у цій територіальній громаді?

2) (*Практична діяльність.*) Дізнайтеся з Інтернету відомості про відсоток працездатних осіб у вашій територіальній громаді (місті, районі, області тощо) та порівняйте його з відсотком працездатних осіб по Україні.

15.24. Залізничний квиток на потяг Київ–Львів для дорослого коштує 180 грн. Знижка на вартість квитка для дітей від 6 до 14 років становить 25 % від вартості квитка для дорослого. Група, що вирушає на екскурсію, складається із 16 дітей віком 12–13 років і 2 дорослих. Скільки коштують квитки на всю групу?

Підготуйтеся до вивчення нового матеріалу

15.25. Яка ймовірність того, що під час підкидання грального кубика випаде число 5?

15.26. З одноцифрових натуральних чисел навмання вибирають одне. Яка ймовірність того, що воно:

1) парне; 2) непарне?

15.27. У шухляді 10 білих і 5 зелених крейд. Навмання вибирають одну крейду. Яка ймовірність того, що вона:

1) біла; 2) зелена?

Перевірте свою компетентність!

Завдання № 15

1. У коробці не більше ніж 40 цукерок. Їх можна поділити порівну між трьома або двома дітьми, але не можна поділити порівну між дев'ятьма дітьми. Укажіть, яка найбільша кількість цукерок може бути в коробці.

А	Б	В	Г	Д
30	33	36	38	39

2. Знайдіть кількість звичайних дробів зі знаменником 18, які більші за $\frac{5}{6}$, але менші ніж 1.

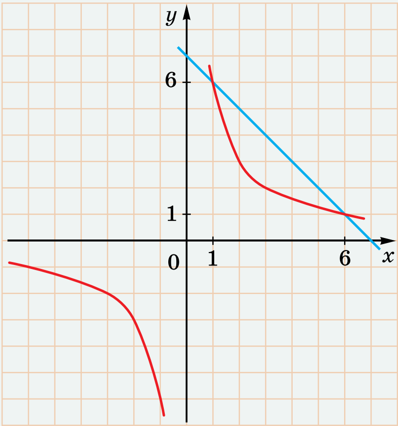
А	Б	В	Г	Д
0	1	2	3	4

3. Розв'яжіть нерівність $\log_{0,2}5 \cdot \log_{0,2}x < 0$.

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty; 0)$	$(0; 1)$	$(1; 5)$	$(1; +\infty)$	$(0; +\infty)$

4. На малюнку зображено графіки функцій $f(x) = \frac{6}{x}$ і $g(x) = 7 - x$. Укажіть розв'язок нерівності $f(x) \leqslant g(x)$.

А	Б	В	Г	Д
$(1; 6)$	$[1; 6]$	$(-\infty; 0] \cup [1; 6]$	$(-\infty; 0) \cup [1; 6]$	$(-\infty; +\infty)$



5. Обчисліть $\sin^2 15° - \cos^2 15°$.

А	Б	В	Г	Д
$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$

6. Ціна акцій щороку підвищується на 20 % відносно попереднього року. Зараз одна акція коштує 500 грн. Якою буде ціна акції через 2 роки?

А	Б	В	Г	Д
600 грн	630 грн	660 грн	700 грн	720 грн

7. У ящику 7 білих, 9 чорних і 4 зелені кульки. Навмання вибирають одну з них. Установіть відповідність між випадковою подією (1–4) та її ймовірністю (А–Д).

Випадкова подія		*Ймовірність*	
1	витягнута кулька біла	**А**	0,35
2	витягнута кулька чорна	**Б**	0,45
3	витягнута кулька зелена або біла	**В**	0,55
4	витягнута кулька не біла	**Г**	0,65
		Д	0,75

	А	Б	В	Г	Д
1					
2					
3					
4					

8. Човен проплив 14 км проти течії річки і 16 км – за течією, затративши на весь шлях 2 год. Знайдіть швидкість течії (у км/год), якщо власна швидкість човна дорівнює 15 км/год.

9. Розв'яжіть рівняння $5^{x+1} - 5^{x} - 5^{x-1} = 95$.

§ 16. КЛАСИЧНЕ ОЗНАЧЕННЯ ЙМОВІРНОСТІ

Проводити численні досліди для визначення статистичної ймовірності події досить важко, а іноді – неможливо. Проте в багатьох прикладних задачах імовірність можна визначити, використовуючи *класичне означення ймовірності*, з яким ви ознайомилися в попередніх класах.

У цьому параграфі розглянемо це питання більш детально та навчимося розв'язувати задачі на підрахунок імовірності за допомогою формул комбінаторики.

1. Несумісні події. Повна група подій. Рівноймовірні події

Події A і B називають *несумісними* в даному досліді, якщо вони не можуть відбутися разом, у протилежному випадку події називають *сумісними*.

Приклад 1. Нехай подія A – «випадання одиниці під час підкидання грального кубика»; B – «випадання шістки під час підкидання грального кубика»; C – «випадання числа, кратного 3, під час підкидання грального кубика». Тоді події A і B – несумісні в цьому досліді, оскільки одночасно випасти одиниця і шістка не можуть. Події B і C – сумісні в цьому досліді, оскільки під час випадання на гральному кубику шістки події B і C відбулися одночасно.

Події $A_1, A_2, ..., A_n$ називають *попарно несумісними*, якщо будь-які дві з них несумісні.

Якщо події $A_1, A_2, ..., A_n$ попарно несумісні та в результаті досліду може відбутися одна і тільки одна з них, то кажуть, що події $A_1, A_2, ..., A_n$ утворюють *повну групу подій*. Множину всіх таких подій називають *простором елементарних подій*, при цьому самі події $A_1, A_2, ..., A_n$ називають *елементарними подіями*.

Приклад 2. Нехай подія A_i означає, що в результаті підкидання грального кубика випало i очок, де $i = 1; 2; 3; 4; 5; 6$. Тоді події A_1, A_2, A_3 є попарно несумісними, але вони не утворюють повну групу подій. А події A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6 є попарно несумісними та утворюють повну групу подій.

У розглянутому прикладі є всі підстави вважати, що випадання, наприклад, одиниці та двійки рівноможливі. Тому події A_1 і A_2 називають *рівноймовірними*.

Рівноймовірними подіями **називають події, ймовірності яких однакові в даному випробуванні.**

Так, наприклад, є рівноймовірними випадання аверса та реверса під час підкидання монети. Влучення в мішень і промах для стрільця, який влучає в мішень з імовірністю 0,9, не є рівноймовірними.

2. Класичне означення ймовірності

Нехай проводиться дослід, результатом якого може бути одна з n випадкових подій, причому ці події утворюють повну групу рівноймовірних подій. Як ви вже знаєте, такі події називають *елементарними подіями*, при цьому дослід називають *класичним*.

Прикладом класичного досліду є вищенаведений приклад 2, елементарні події якого – це події A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6.

Випадок, у результаті якого відбувається подія A, називають випадком, що сприяє появі події A.

Нагадаємо відоме вам з попередніх класів *класичне означення ймовірності:*

ймовірність події A дорівнює відношенню кількості випадків m, що сприяють появі події A, до кількості всіх можливих випадків n:

$$p(A) = \frac{m}{n}.$$

Зауважимо, що це означення не суперечить статистичному означенню ймовірності та дає змогу зробити ті самі висновки:

ймовірність вірогідної події дорівнює 1; ймовірність неможливої події дорівнює 0; ймовірність випадкової події може бути будь-яким числом від 0 до 1.

Дійсно, якщо подія U – вірогідна, то кількість випадків, що сприяють появі події U, дорівнює кількості всіх можливих випадків, тобто $m = n$, а тому $p(U) = \frac{n}{n} = 1$. Якщо подія

V – неможлива, то кількість випадків, що сприяють появі події V, дорівнює нулю, тобто $m = 0$, а тому $p(V) = \frac{0}{n} = 0$. Якщо A – довільна випадкова подія, то $0 \leqslant m \leqslant n$, а тому $0 \leqslant \frac{m}{n} \leqslant 1$, тобто $0 \leqslant p(A) \leqslant 1$.

Розглянемо задачі.

Задача 1. У коробці 5 білих і 15 чорних кульок. Навмання виймають одну з них. Яка ймовірність того, що вона біла (подія A)?

Розв'язання. З коробки можна витягнути з рівною ймовірністю будь-яку з $5 + 15 = 20$ кульок, тому $n = 20$. Число випадків, що сприяють події A, дорівнює 5, тобто $m = 5$. Отже, $p(A) = \frac{5}{20} = 0,25$.

Відповідь. 0,25.

Задача 2. На картках записано натуральні числа від 1 до 20. Навмання вибирають одну з карток. Яка ймовірність того, що число, записане на картці, є дільником числа 20 (подія A)?

Розв'язання. Зрозуміло, що $n = 20$. Натуральними дільниками числа 20 є числа 1, 2, 4, 5, 10, 20. Маємо $m = 6$, і тоді $p(A) = \frac{6}{20} = 0,3$.

Відповідь. 0,3.

Задача 3. Одночасно підкинули два гральних кубики. Яка ймовірність того, що сума очок, які випали на кубиках:
1) дорівнює 8; 2) більша за 9?

Розв'язання. Складемо таблицю суми очок, що може випасти на двох гральних кубиках під час їх одночасного підкидання, $n = 36$ – кількість усіх можливих випадків.

II \ I	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

1) Є 5 випадків, коли сума очок на обох кубиках дорівнює 8. Отже, $m = 5$, а тому $p = \frac{m}{n} = \frac{5}{36}$.

2) Є 6 випадків, коли сума очок на обох кубиках більша за 9. Отже, $m = 6$, а тому $p = \frac{m}{n} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$.

Відповідь. 1) $\frac{5}{36}$; 2) $\frac{1}{6}$.

3. Розв'язування задач на підрахунок імовірностей за допомогою формул комбінаторики

Часто в задачах на підрахунок імовірності використовують формули комбінаторики. Розглянемо задачі.

Задача 4. Нехай є п'ять відрізків, довжини яких: 1 см, 3 см, 5 см, 7 см і 9 см. Навмання вибираємо три з них. Яка ймовірність того, що з них можна скласти трикутник?

Розв'язання. Кількість усіх можливих випадків – це кількість способів, якими можна (без врахування порядку) вибрати три відрізки з п'яти. Отже, $n = C_5^3 = 10$. Трикутник можна скласти лише з таких наборів: 3 см, 5 см, 7 см, або 3 см, 7 см, 9 см, або 5 см, 7 см, 9 см. Отже, $m = 3$ і $p = \frac{3}{10} = 0{,}3$.
Відповідь. 0,3.

Задача 5. У ящику 10 синіх і 8 чорних стержнів для кулькової ручки. Навмання вибирають два з них. Яка ймовірність того, що:
1) вони обидва сині; 2) один з них синій, інший – чорний?

Розв'язання. Для обох задач $n = C_{18}^2 = 153$ – кількість усіх можливих випадків.
1) Вибрати два синіх стержні можна C_{10}^2 способами. Отже, $m = C_{10}^2 = 45$; $p = \frac{45}{153} = \frac{5}{17}$.
2) Вибрати один синій стержень можна C_{10}^1 способами, і після кожного такого вибору вибрати чорний можна C_8^1 способами. За правилом добутку $m = C_{10}^1 \cdot C_8^1 = 10 \cdot 8 = 80$, а отже, $p = \frac{80}{153}$.
Відповідь. 1) $\frac{5}{17}$; 2) $\frac{80}{153}$.

● Які події називають несумісними в даному досліді, а які – сумісними? ● Які події називають попарно несумісними? ● Коли події $A_1, A_2, ..., A_n$ утворюють повну групу подій? ● Що називають простором елементарних подій? ● Які події називають рівноймовірними? ● Сформулюйте класичне означення ймовірності. ● Який висновок на основі класичного означення ймовірності можна зробити про ймовірність вірогідної, неможливої та випадкової події?

Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

1 **16.1.** (*Усно.*) Які події можуть відбутися внаслідок таких випробувань:
1) підкидання монети;
2) вибір деталі з партії, у якій 1000 якісних деталей і 5 бракованих?

16.2. Для кожного з випробувань складіть повну групу подій:
1) результат футбольного матчу команд A і B;
2) результат баскетбольного матчу команд A і B;
3) вибір кульки з ящика, у якому 10 білих і 8 чорних кульок;
4) вибір одноцифрового натурального числа.

16.3. Для кожного з випробувань складіть повну групу подій:
1) результат тенісної партії між гравцями A і B;
2) результат шахової партії між гравцями A і B;
3) витягування лотерейного квитка з барабана, у якому 20 білетів без виграшу і 5 з виграшем;
4) підкидання кубика, дві грані якого пофарбовано в білий колір, дві – у чорний, дві – у зелений.

16.4. (*Усно.*) Наведіть приклад:
1) рівноймовірних подій;
2) подій, які не є рівноймовірними в даному випробуванні.

16.5. Підкидається гральний кубик. Сумісні чи несумісні такі події:
1) A – «випадання 1», B – «випадання 2»;
2) C – «випадання 6», B – «випадання числа, кратного 2»?

16.6. Під час підкидання грального кубика сумісні чи несумісні такі події:
1) A – «випадання 5», B – «випадання 5 або 6»;
2) C – «випадання 4», B – «випадання числа, кратного 5»?

2

16.7. У ящику 18 білих і 12 чорних кульок. Яка ймовірність витягнути з ящика:
1) білу кульку; 2) чорну кульку?

16.8. У класі 10 хлопців і 15 дівчат. Яка ймовірність того, що з класу навмання оберуть:
1) хлопця; 2) дівчину?

16.9. У магазині виявилося, що з 500 сматрфонів 4 – бракованих. Яка ймовірність того, що навмання обраний смартфон:
1) бракований; 2) якісний?

16.10. З 50 легкоатлетів і легкоатлеток, що виступали на олімпіаді, 12 отримали медалі. Знайдіть імовірність того, що навмання обраний атлет чи атлетка:
1) отримав(-ла) медаль; 2) не отримав(-ла) медалі.

16.11. Рівноймовірні чи ні події A та B, якщо:
1) A – з 10 карток із числами від 1 до 10 витягнути картку із числом 1, B – з 10 карток із числами від 1 до 10 витягнути картку із числом 2;

2) A – витягнути білу кульку з коробки, у якій 4 білі кульки і 6 чорних, B – витягнути чорну кульку з коробки, у якій 4 білі кульки і 6 чорних;
3) A – під час підкидання грального кубика випало просте число, B – під час підкидання грального кубика випало складене число;
4) A – витягнути червону хустку зі скрині, у якій половина хусток червоні, а інша половина – строкаті, B – витягнути строкату хустку зі скрині, у якій половина хусток червоні, а половина – строкаті?

16.12. У корзині 12 червоних, 3 зелених і 5 жовтих яблук. Навмання вибирають одне яблуко. Яка ймовірність таких подій:
1) яблуко зелене; 2) яблуко зелене або жовте;
3) яблуко червоне; 4) яблуко не зелене?

16.13. У коробці 6 синіх ручок, 3 червоні та 1 зелена. Навмання вибираємо одну ручку. Яка ймовірність події:
1) ручка червона; 2) ручка синя;
3) ручка червона або зелена; 4) ручка не червона?

16.14. (*Задача Д'Аламбера.*) Яка ймовірність того, що під час двох підкидань монети хоча б один раз випаде аверс?

16.15. Гральний кубик підкидають один раз. Яка ймовірність події:
1) A – випаде парне число;
2) B – випаде не більше ніж 3 очки;
3) C – випаде число, що є дільником числа 12;
4) D – випаде число, що є квадратом натурального числа?

16.16. Гральний кубик підкидають один раз. Яка ймовірність події:
1) A – випаде непарне число;
2) B – випаде не менше ніж 5 очок;
3) C – випаде число, що є дільником числа 18;
4) D – випаде число, що є кубом натурального числа?

16.17. У ящику лежать 12 намистин, дві з яких – білі. Яка ймовірність того, що вибрані навмання дві намистини – білі?

16.18. У коробці лежать 10 олівців, три з яких – червоні. Яка ймовірність того, що вибрані навмання три олівці – червоні?

3

16.19. З натуральних чисел від 1 до 24 навмання вибирають одне. Яка ймовірність того, що це число не є дільником числа 24?

16.20. З натуральних чисел від 1 до 30 навмання вибирають одне. Яка ймовірність того, що це просте число або дільник числа 30?

16.21. Одночасно підкидають два гральних кубики. Знайдіть імовірності події:

1) на кубиках випаде однакова кількість очок;
2) сума очок на кубиках дорівнюватиме 4;
3) сума очок на кубиках буде не більша за 4;
4) сума очок на кубиках буде простим числом.

16.22. Одночасно підкидають два гральних кубики. Знайдіть імовірності події:

1) на кубиках випаде різна кількість очок;
2) сума очок на кубиках дорівнюватиме 9;
3) сума очок на кубиках буде не більша за 9;
4) сума очок на кубиках буде складеним числом.

16.23. У ящику лежать 18 білих кульок і кілька чорних. Скільки чорних кульок у ящику, якщо ймовірність витягнути навмання:

1) білу кульку дорівнює 0,6;
2) чорну кульку дорівнює $\frac{1}{4}$;
3) білу кульку більша за 0,75;
4) чорну кульку більша за 0,3?

16.24. У коробці 10 шоколадних цукерок і кілька карамельних. Скільки карамельних цукерок у коробці, якщо ймовірність витягнути навмання:

1) шоколадну цукерку дорівнює $\frac{2}{3}$;
2) карамельну цукерку дорівнює 0,6;
3) шоколадну цукерку менша за 0,4;
4) карамельну цукерку менша за 0,3?

16.25. Маємо п'ять відрізків, довжини яких: 1 см, 2 см, 4 см, 7 см, 9 см. Навмання вибираємо три з них. Знайдіть імовірність того, що з них можна скласти трикутник.

16.26. Є п'ять карток із числами 1, 3, 5, 7, 9. Навмання вибираємо три з них. Яка ймовірність того, що з них можна утворити арифметичну прогресію?

16.27. З ящика, що містить 6 пронумерованих кульок, навмання виймають одну за одною всі кульки. Знайдіть імовірність того, що всі вийняті кульки будуть йти за порядком нумерації.

16.28. З літер розрізної абетки складено слово «буква». Потім літери слова перемішують і навмання беруть одну за одною. Знайдіть імовірність того, що буде складено початкове слово.

16.29. На картках записано числа від 1 до 20. Навмання беруть дві з них. Яка ймовірність того, що сума чисел на картках дорівнюватиме 15?

16.30. На картках записано числа від 1 до 15. Навмання беруть дві з них. Яка ймовірність того, що модуль різниці чисел на картках дорівнюватиме 2?

4 **16.31.** Яка ймовірність того, що навмання вибране двоцифрове число кратне 5?

16.32. Яка ймовірність того, що навмання вибране двоцифрове непарне число кратне 7?

16.33. У магазині 50 кавунів, з яких 40 стиглих. Купили два кавуни. Яка ймовірність того, що вони обидва стиглі?

16.34. Серед 40 деталей 36 – якісні. Яка ймовірність того, що серед трьох навмання взятих деталей немає бракованих?

16.35. У ящику 8 білих і 6 чорних кульок. Вибираємо навмання три з них. Яка ймовірність того, що:

1) всі три кульки білі;
2) дві кульки білі та одна чорна;
3) серед кульок є як білі, так і чорні?

16.36. У шухляді 7 синіх і 3 червоні ручки. Вибираємо навмання дві з них. Яка ймовірність того, що:

1) обидві ручки сині; 2) ручки різних кольорів?

16.37. Вибирають навмання три літери слова «павутина». Яка ймовірність того, що з вибраних трьох літер можна скласти слово «пан»?

16.38. Вибирають навмання чотири літери слова «козак». Яка ймовірність того, що з них можна скласти слово «коза»?

16.39. По черзі вибирають три літери слова «тринадцять». Яка ймовірність того, що вибрані три літери в послідовності складуть слово «три»?

16.40. По черзі вибирають три літери слова «двадцять». Яка ймовірність того, що вибрані три літери в послідовності складуть слово «два»?

Життєва математика

16.41. В одному з англійських видань можна прочитати, що зріст Наполеона становив 5 футів 2 дюйми. Який був його зріст у сантиметрах, якщо 1 фут дорівнює 0,305 м, а 1 дюйм дорівнює 2,54 см? (Результат округліть до цілого числа сантиметрів.)

16.42. Людині 16–17 років, щоб почуватися добре, потрібно приблизно 2500 Ккал на добу. За сніданком Марічка отримала 700 Ккал, за обідом – 1000 Ккал, за полуденком – 300 Ккал.

1) Який відсоток від добової норми калорій отримала Марічка за сніданком, який – за обідом, який – за полуденком?
2) Якою має бути калорійність вечері, щоб добову норму було виконано?
3) (*Практична діяльність.*) Проаналізуйте свій раціон харчування за один день. Знайдіть в Інтернеті таблицю калорійності продуктів та обчисліть приблизну кількість калорій, яку ви спожили протягом доби.

Перевірте свою компетентність!

Завдання № 16

1. Якщо $\frac{3}{x} = y - \frac{1}{z}$, то $x = \ldots$

А	Б	В	Г	Д
$\frac{3z}{yz+1}$	$\frac{3z}{yz-1}$	$\frac{z}{yz-1}$	$\frac{yz+1}{3z}$	$\frac{yz-1}{3z}$

2. Обчисліть $\lg(2x) + \lg(5y)$, якщо $\lg(xy) = -8$.

А	Б	В	Г	Д
-8	8	-7	7	неможливо визначити

3. Розв'яжіть нерівність $0{,}5^{-x} > 8$.

А	Б	В	Г	Д
$x > -3$	$x < -3$	$x > \frac{1}{3}$	$x < 3$	$x > 3$

4. Розв'яжіть рівняння $\sqrt{3}\sin x = 2$.

А	Б	В	Г	Д
$(-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k,$ $k \in Z$	$(-1)\frac{\pi}{3} + \pi k,$ $k \in Z$	$\pm\frac{\pi}{6} + 2\pi k,$ $k \in Z$	$\pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k,$ $k \in Z$	рівняння не має розв'язків

5. Знайдіть $f'(16)$, якщо $f(x) = 16\sqrt{x}$.

А	Б	В	Г	Д
64	4	$\frac{1}{2}$	2	1

6. Спростіть вираз $\sin\alpha\cos\alpha\cos2\alpha$.

А	Б	В	Г	Д
$\sin4\alpha$	$\cos4\alpha$	$\frac{1}{2}\sin4\alpha$	$\frac{1}{4}\sin4\alpha$	інша відповідь

7. Установіть відповідність між рівнянням (1–4) та твердженням про його корені (А–Д).

Рівняння

1 $x^2+4x-7=0$

2 $x^2-4x-5=0$

3 $x^2+4x+5=0$

4 $x^2+7x+5=0$

Твердження про корені рівняння

А рівняння не має дійсних коренів

Б сума коренів рівняння дорівнює 4

В сума коренів рівняння дорівнює −4

Г добуток коренів рівняння дорівнює 5

Д добуток коренів рівняння дорівнює 7

	А	Б	В	Г	Д
1					
2					
3					
4					

8. Знайдіть x_0+y_0, де $(x_0;\ y_0)$ – розв'язок системи рівнянь

$$\begin{cases}x^2-y^2=12,\\ x-y=2.\end{cases}$$

9. Знайдіть менший корінь рівняння $\log_2(2x)\cdot\log_2(0{,}5x)=3$.

§ 17. ЕЛЕМЕНТИ МАТЕМАТИЧНОЇ СТАТИСТИКИ

Деякі відомості про математичну статистику ви вже знаєте з 9-го класу. У цьому параграфі узагальнимо та розширимо ці відомості.

1. Уявлення про математичну статистику

У процесі практичної діяльності людям часто доводиться збирати, опрацьовувати та аналізувати різні дані, пов'язані з масовими явищами, процесами, подіями. Такі дані, як вам відомо з молодших класів, називають *статистичними даними*.

Математична статистика **– розділ математики, у якому вивчають методи збирання, систематизації, обробки та дослідження статистичних даних для наукових і практичних висновків.**

Латинське слово «status» перекладається як *стан*, *становище*.

Математична статистика тісно пов'язана з теорією ймовірностей. Обидві ці математичні дисципліни вивчають випадкові події. Теорія ймовірностей на основі математичної моделі робить висновки про реальні процеси, а математична статистика встановлює властивості математичної моделі, виходячи зі спостережень на основі статистичних даних.

2. Генеральна сукупність і вибірка

Вивчаючи різні масові явища, дослідники проводять спеціальні статистичні дослідження. Першим етапом статистичних досліджень є етап збору інформації, статистичних даних.

Нехай потрібно вивчити деяку сукупність об'єктів відносно деякої ознаки. Наприклад, якщо розглядати роботу продавця, то можна досліджувати його завантаженість протягом години, швидкість обслуговування клієнта, тип клієнта тощо. Розглядаючи учнів та учениць деякого 11-го класу, можна досліджувати їх зріст, масу, розмір взуття, середню успішність тощо.

Генеральна сукупність **– це сукупність усіх об'єктів, що підлягають дослідженню.**

Обсяг генеральної сукупності, тобто число об'єктів дослідження, може бути досить великим, а іноді й нескінченним[1]. Наприклад, практично неможливо виміряти зріст усіх одинадцятикласників України або розмір їх взуття. Але ці дані потрібні, наприклад, взуттєвій фабриці, яка хоче мати інформацію про кількість взуття кожного розміру, яке треба пошити.

У подібних випадках найкращим способом дослідження є *вибіркові спостереження*: з генеральної сукупності вибирають її деяку частину – *вибірку* та досліджують її.

Вибіркою **називають сукупність об'єктів, вибраних випадковим чином з генеральної сукупності.**

Обсяг вибірки зазвичай істотно менший, ніж обсяг генеральної сукупності.

Метод математичного дослідження, який полягає у тому, що на основі дослідження вибірки роблять висновок про всю генеральну сукупність, називають *вибірковим методом.*

[1] Часто буває неможливо дослідити всі об'єкти генеральної сукупності.

Для того щоб у результаті застосування вибіркового методу отримати хороші оцінки генеральної сукупності, потрібно, щоб вибірка була *репрезентативною*, тобто щоб вона досить повно представляла ознаки генеральної сукупності, що вивчаються. Умовою забезпечення репрезентативної вибірки є дотримання випадковості відбору, тобто об'єкти генеральної сукупності повинні мати однакові ймовірності потрапити у вибірку.

3. Систематизація і ранжування вибірки

Другим етапом статистичних досліджень є систематизація отриманих даних (вибірки), тобто подання вибірки у зручному для подальших дій вигляді.

Приклад 1. Усі одинадцятикласники деякого району писали одну й ту саму перевірочну контрольну роботу з математики за текстом районного управління освіти. Вибірку склали 30 навмання обраних робіт цих одинадцятикласників. Нехай вибрані одинадцятикласники отримали такі оцінки.

4	8	3	7	10	6	8	5	9	7
9	2	6	1	8	4	11	7	10	12
10	5	11	4	7	6	3	8	2	9

Дані цієї вибірки можна систематизувати в таблицю за кількістю набраних балів.

Отриманий бал за контрольну роботу	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Кількість учнів	1	2	2	3	2	3	4	4	3	3	2	1

Дані вибірки можна також систематизувати за рівнями навчальних досягнень.

Рівень навчальних досягнень	Початковий рівень (1–3 бали)	Середній рівень (4–6 балів)	Достатній рівень (7–9 балів)	Високий рівень (10–12 балів)
Кількість учнів	5	8	11	6

Операцію розташування випадкових величин вибірки за принципом неспадання називають *ранжуванням* вибірки. Отже, після ранжування кожне наступне число вибірки не менше за попереднє.

Приклад 2. У результаті ранжування вибірки, розглянутої у прикладі 1, матимемо:

1; 2; 2; 3; 3; 4; 4; 4; 5; 5; 6; 6; 6; 7; 7; 7; 7; 8; 8; 8; 8; 9; 9; 9; 10; 10; 10; 11; 11; 12.

4. Вибіркові характеристики

Третім етапом статистичних досліджень є оцінювання числових характеристик вибірки, які ще називають *вибіркові характеристики*. Розглянемо деякі з них.

Розмах вибірки R **– це різниця між найбільшим і найменшим значенням випадкової величини у вибірці.**

Для вибірки, розглянутої у прикладах 1–2, отримаємо $R = 12 - 1 = 11$.

Мода вибірки Мо **– це значення випадкової величини, що трапляється у вибірці найчастіше.**

Для вибірки, розглянутої у прикладах 1–2, є дві моди, це оцінки 7 і 8. Можна записати $Mo_1 = 7$, $Mo_2 = 8$.

Медіана вибірки Ме **– це серединне значення ранжованої вибірки.**

Медіана ділить ранжовану вибірку на дві рівні за кількістю частини. Якщо у вибірці непарна кількість випадкових величин, то її медіаною є число, яке стоїть посередині. Наприклад, у ранжованій вибірці:

$$1;\ 2;\ 3;\ 3;\ \boxed{3};4;\ 5;\ 5;\ 6,$$

що складається з 9 випадкових величин, медіаною є число 3. Можна записати $Me = 3$.

Якщо у вибірці парне число випадкових величин, то його медіана – середнє арифметичне двох чисел, що стоять посередині. Наприклад, у ранжованій вибірці:

$$2;\ 3;\ 4;\ \boxed{4};\ \boxed{5};\ 5;\ 5;\ 6,$$

що складається з 8 випадкових величин, медіана – це середнє арифметичне чисел 4 і 5, що стоять посередині ряду. Отже, $Me = \dfrac{4+5}{2} = 4{,}5$.

Середнє значення вибірки $\bar{x}$ **– це середнє арифметичне всіх її значень** $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$.

Отже, середнє значення вибірки, розглянутої у прикладах 1–2, знаходимо так:

$$\overline{x} = \frac{1\cdot1+2\cdot2+3\cdot2+4\cdot3+5\cdot2+6\cdot3+7\cdot4+8\cdot4+9\cdot3}{30} +$$

$$+\frac{10\cdot3+11\cdot2+12\cdot1}{30} = \frac{202}{30} = 6\frac{11}{15} \approx 6{,}73 \text{ (з точністю до сотих).}$$

5. Графічне зображення інформації про вибірку

Результати статистичних досліджень після обробки можна подати в наочній і компактній формах.

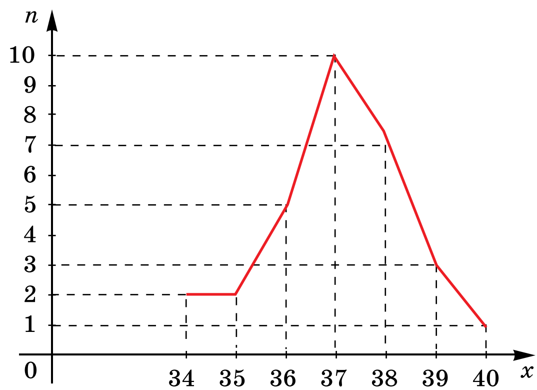
Нехай дані вибірки систематизовано в таблицю, де в першому рядку розміщено значення випадкової величини x, а у другому – відповідні їм частоти n.

Полігоном частот називають ламану лінію, відрізки якої послідовно сполучають точки з координатами $(x_1;\ n_1)$, $(x_2;\ n_2)$, ..., $(x_k;\ n_k)$, де x_i – значення випадкової величини, n_i – відповідні їм частоти.

Приклад 3. У вигляді таблиці систематизовано дані вибірки про розмір взуття 30 дівчат 11-го класу.

Розмір взуття, x	34	35	36	37	38	39	40
Частота, n	2	2	5	10	7	3	1

Побудуємо полігон частот (мал. 17.1).



Мал. 17.1

Ви вже знаєте, як подавати результати статистичних досліджень у вигляді графіків, гістограм, кругових діаграм. Це можна робити за допомогою програмних засобів, наприклад, застосувавши програму *Excel* з офісного пакета від компанії *Microsoft* або аналогічні.

На малюнку 17.2 зображено гістограму розподілу кількості учнів залежно від отриманого бала, а на малюнку 17.3 –

кругову діаграму розподілу кількості учнів залежно від рівня навчальних досягнень. Гістограму та кругову діаграму побудовано за допомогою програми *Excel*.

Мал. 17.2

Мал. 17.3

● Що вивчає математична статистика? ● Що таке генеральна сукупність? ● Що називають вибіркою? ● У чому полягає вибірковий метод? ● Що називають розмахом вибірки? ● Що називають модою вибірки? ● Що називають медіаною вибірки? ● Що таке середнє значення вибірки? ● Що називають полігоном частот?

Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

17.1. Дано генеральну сукупність із 30 об'єктів:
7; 12; 11; 8; 13; 1; 9; 11; 12; 17; 20; 14; 17; 18; 20;
2; 14; 19; 20; 3; 7; 15; 19; 20; 14; 5; 4; 9; 7; 13.
Створіть вибірку цієї генеральної сукупності:
1) усіх об'єктів, що стоять на парних місцях;
2) п'яти об'єктів поспіль, починаючи з тринадцятого;
3) об'єктів, узятих через два, починаючи з третього;
4) шести об'єктів поспіль, починаючи з номера, який відповідає номеру вашого прізвища у класному журналі.

17.2. Дано генеральну сукупність із 40 об'єктів:
7; 19; 21; 14; 30; 9; 17; 22; 21; 8;
13; 17; 22; 9; 20; 3; 15; 21; 11; 1;
3; 19; 20; 24; 27; 12; 14; 19; 13; 14;
29; 17; 21; 30; 25; 13; 19; 8; 1; 5.
Створіть вибірку цієї генеральної сукупності:
1) усіх об'єктів, що стоять на непарних місцях;
2) семи об'єктів поспіль, починаючи з дванадцятого;
3) об'єктів, узятих через три, починаючи з другого;
4) п'яти об'єктів поспіль, починаючи з номера літери в українській абетці, яка відповідає першій літері вашого імені.

17.3. Стрілець у п'яти серіях по 10 пострілів у кожній влучив у мішень таку кількість разів: 7; 6; 8; 9; 6. Знайдіть для цієї вибірки:

1) розмах; 2) моду;
3) медіану; 4) середнє значення.

17.4. Баскетболістка в десяти серіях по 5 кидків у кожній влучила в кошик таку кількість разів: 2; 3; 4; 3; 3; 1; 5; 3; 2; 4. Знайдіть для цієї вибірки:

1) розмах; 2) моду;
3) медіану; 4) середнє значення.

17.5. 1) Проведіть ранжування генеральної сукупності об'єктів задачі 17.1.
2) Знайдіть медіану цієї генеральної сукупності.

17.6. 1) Проведіть ранжування генеральної сукупності об'єктів задачі 17.2.
2) Знайдіть медіану цієї генеральної сукупності.

17.7. 1) Заповніть таблицю за даними задачі 17.4.

Кількість влучень у серії	1	2	3	4	5
Кількість серій					

2) Побудуйте полігон частот за отриманими даними.

17.8. 1) Заповніть таблицю за даними задачі 17.3.

Кількість влучень у серії	6	7	8	9
Кількість серій				

2) Побудуйте полігон частот за отриманими даними.

17.9. У таблиці подано кількість медалей, що здобули українські спортсмени та спортсменки на літніх олімпійських іграх.

Рік олімпіади	**Золоті**	**Срібні**	**Бронзові**	**Усього**
1996	9	2	12	23
2000	3	10	10	23
2004	8	5	9	22
2008	7	5	15	27
2012	6	5	8	19
2016	2	5	4	11

За даними таблиці побудуйте гістограму кількості золотих медалей, що здобули українські спортсмени та спортсменки.

17.10. За даними таблиці задачі 17.9 побудуйте гістограму кількості срібних медалей, що здобули українські спортсмени.

17.11. Придумайте вибірку з п'яти елементів, медіаною якої є число 7.

17.12. Придумайте вибірку із семи елементів, медіаною якої є число 5.

17.13. Розмах деякої вибірки дорівнює 9, а її найбільший елемент дорівнює 17. Чому дорівнює найменший елемент вибірки?

17.14. Розмах деякої вибірки дорівнює 13, а її найменший елемент дорівнює 10. Чому дорівнює найбільший елемент вибірки?

3 **17.15.** За даними таблиці задачі 17.9 побудуйте кругову діаграму кількості бронзових медалей, що здобули українські спортсмени та спортсменки.

17.16. За даними таблиці задачі 17.9 побудуйте кругову діаграму загальної кількості медалей, що здобули українські спортсмени та спортсменки.

17.17. Придумайте вибірку із семи елементів, модою якої є число 7, а медіаною – число 9.

17.18. Придумайте вибірку з п'яти елементів, модою якої є число 10, а медіаною – число 8.

17.19. Вибірка, середнє значення якої дорівнює 8,4, складається із чисел 9; a; 12; 6; $2a$. Знайдіть:

1) a; 2) медіану цієї вибірки.

17.20. Вибірка, середнє значення якої дорівнює 10,6, складається із чисел b; 7; 16; $3b$; 10. Знайдіть:

1) b; 2) медіану цієї вибірки.

17.21. На телефонній станції спостерігають за кількістю неправильних з'єднань протягом хвилини. Результати спостережень систематизовано в таблицю.

Кількість неправильних з'єднань протягом хвилини, x	0	1	2	3	4
Кількість хвилин, n	4	10	11	12	3

Знайдіть для випадкової величини x:

1) середнє значення; 2) моду; 3) медіану.

17.22. На заводі спостерігають за кількістю бракованих деталей x, виготовлених робітником протягом зміни. Результати спостережень систематизовано в таблицю.

Кількість бракованих деталей протягом зміни, x	0	1	2	3
Кількість змін, n	4	5	7	4

Знайдіть для випадкової величини x:
1) середнє значення; 2) моду; 3) медіану.

17.23. Придумайте вибірку, що складається із цілих чисел, медіаною якої є число 7,5.

17.24. (*Практичне завдання.*)
1) Дізнайтеся оцінки, отримані учнями та ученицями вашого класу під час останньої контрольної роботи з математики. За допомогою комп'ютерної програми побудуйте гістограму за цими даними.
2) Систематизуйте отримані дані за рівнями навчальних досягнень. За допомогою комп'ютерної програми побудуйте кругову діаграму за цими даними.

Життєва математика

17.25. У магазині всі меблі продаються в розібраному вигляді. Покупець може замовити складання меблів на дому, вартість якого становить 12 % від вартості куплених меблів. Скільки грошей зекономить родина Сидорчуків, якщо вони зберуть шафу вартістю 3650 грн самостійно?

17.26. Система навігації, вбудована у спинку літакового крісла, інформує пасажирів про те, що політ проходить на висоті 40 000 футів. Обчисліть висоту польоту в кілометрах. Вважайте, що 1 фут дорівнює 30,5 см.

Перевірте свою компетентність!

Завдання № 17

1. Відомо, що $\log_{0,1} x > \log_{0,1} 11$. Якому значенню може дорівнювати x?

А	Б	В	Г	Д
0	2	12	22	42

2. Розв'яжіть рівняння $16^x = 8$.

А	Б	В	Г	Д
0	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	1	$\frac{4}{3}$

3. Знайдіть значення виразу $6\sin\frac{\pi}{6} + 3\cos\pi$.

А	Б	В	Г	Д
–3	–1	0	2	4

4. Похідна якої з функцій не існує в точці 0?

А	Б	В	Г	Д
$y = \sin x$	$y = \operatorname{tg} x$	$y = x^2$	$y = \sqrt{x}$	$y = 4$

5. Дано $f(x) = 5\operatorname{tg} x - 3\sin x + 4$. Знайдіть $f'(0)$.

А	Б	В	Г	Д
5	4	3	6	9

6. Значення якого з виразів найменше?

А	Б	В	Г	Д
$0{,}1^3$	$0{,}1^5$	$0{,}1^{\pi}$	$0{,}1^{3{,}2}$	$0{,}1^4$

7. Установіть відповідність між числовим виразом (1–4) та значенням цього числового виразу (А–Д).

Числовий вираз	*Значення числового виразу*
1 $125^{\frac{1}{3}} - 3^0$	**А** 2
2 $81^{\frac{1}{4}} + \left(\frac{1}{2}\right)^{-1}$	**Б** 3
3 $\frac{1}{3} \cdot 27^{\frac{2}{3}}$	**В** 4
4 $16 \cdot 64^{-\frac{1}{2}}$	**Г** 5
	Д 6

	А	Б	В	Г	Д
1					
2					
3					
4					

8. Обчисліть $\sin 7°30' \cos 7°30' \cos 15°$.

9. У шухляді є чорні та білі кульки, різниця між кількістю яких дорівнює 8. Імовірність витягнути навмання білу кульку із шухляди дорівнює 0,3. Скільки чорних кульок у шухляді?

Домашня самостійна робота № 3

Кожне завдання має по чотири варіанти відповіді (А–Г), серед яких лише один є правильним. Оберіть правильний варіант відповіді.

1. Обчисліть C_6^2.

А. 30 **Б.** 12 **В.** 15 **Г.** 18

2. У танцювальному гуртку займається 6 юнаків і 8 дівчат. Скількома способами можна сформувати танцювальну пару із цього гуртка для участі в конкурсі?

А. 64 **Б.** 14 **В.** 36 **Г.** 48

3. Знайдіть розмах вибірки 4; 7; 1; 5; 4; 9; 7.

А. 3 **Б.** 8 **В.** 5 **Г.** 7

2

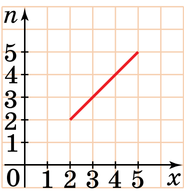
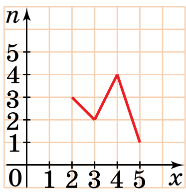
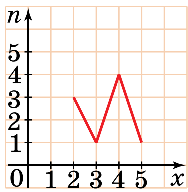
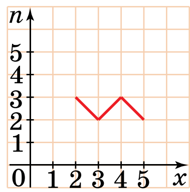
4. Баскетбольна команда складається із 12 дівчат. Скількома способами можна вибрати капітаншу цієї команди та її заступницю?

А. 132 **Б.** 144 **В.** 66 **Г.** 12

5. У скрині лежать 6 білих хустинок, 3 червоні й 1 строката. Яка ймовірність витягнути навмання зі скрині білу хустинку?

А. $\frac{1}{10}$ **Б.** $\frac{3}{10}$ **В.** $\frac{3}{5}$ **Г.** 1

6. На якому з малюнків правильно побудовано полігон частот за даними: 3; 4; 2; 4; 4; 2; 3; 5; 4; 2?

<table>
<tr><th>А</th><th>Б</th><th>В</th><th>Г</th></tr>
<tr>
<td>
</td>
<td>
</td>
<td>
</td>
<td>
</td>
</tr>
</table>

3

7. Було опитано 400 жителів деякого міста, серед яких 372 вказали про те, що користуються Інтернетом. Скільки приблизно жителів міста заявили б про те, що користуються Інтернетом, якби було опитано 1000 жителів?

А. 830 **Б.** 990 **В.** 900 **Г.** 930

8. Скільки різних непарних чотирицифрових чисел можна скласти із цифр 0, 5, 7, 8, якщо в кожному із чисел усі цифри різні?

А. 16 **Б.** 4 **В.** 8 **Г.** 12

9. З натуральних чисел від 1 до 12 навмання вибирають одне. Яка ймовірність того, що це число просте або є дільником числа 12?

А. $\frac{3}{4}$ **Б.** $\frac{1}{4}$ **В.** $\frac{5}{6}$ **Г.** $\frac{2}{3}$

4

10. Скількома способами можна розділити 6 різних цукерок між трьома дітьми, якщо кожна дитина отримує по дві цукерки?

А. 6^6 **Б.** 45 **В.** 360 **Г.** 90

11. В ящику 6 білих і 4 чорні кульки. Навмання вибираємо три з них. Яка ймовірність того, що серед них 2 білі кульки і одна чорна?

А. $\frac{2}{3}$ **Б.** $\frac{1}{3}$ **В.** $\frac{1}{2}$ **Г.** $\frac{4}{5}$

12. Відомо, що біатлоністка влучає у мішень під час тренування з імовірністю, більшою за 0,7, але меншою ніж 0,72. Скільки приблизно мало бути виконано пострілів під час тренування, якщо біатлоністка зробила 4 промахи?

А. 40 **Б.** 11 **В.** 12 **Г.** 21

Завдання для перевірки знань до §§ 13–17

1

1. Обчисліть: 1) A_6^3; 2) $P_3 + P_2$.

2. На тарілці 5 яблук і 3 груші. Скількома способами з тарілки можна взяти:

1) один фрукт; 2) одне яблуко та одну грушу?

3. Стрілець у семи серіях з 5 пострілів у кожній влучив у мішень таку кількість разів: 2; 4; 4; 3; 4; 2; 3. Знайдіть для цієї вибірки:

1) розмах; 2) моду; 3) медіану; 4) середнє значення.

2

4. На полі розміщено 10 точок. Скільки прямих можна провести через ці точки?

5. У ящику 8 синіх і 2 червоних олівці. Яка ймовірність витягнути навмання з ящика:

1) синій олівець; 2) червоний олівець?

6. Баскетболіст у 20 серіях по 10 кидків у кожній влучив у кошик таку кількість разів: 3; 5; 4; 2; 7; 3; 8; 4; 5; 6; 9; 2; 3; 6; 4; 7; 4; 2; 3; 5.

1) Заповніть таблицю за цими даними.

Кількість влучень у серії	2	3	4	5	6	7	8	9
Кількість серій								

2) Побудуйте полігон частот за отриманими даними.

3

7. Було перевірено 500 деталей, з яких 4 виявилися бракованими.

1) Якою є відносна частота появи бракованої деталі?

2) Скільки приблизно бракованих деталей буде в партії з 1250 деталей?

8. З натуральних чисел від 1 до 20 навмання вибирають одне. Яка ймовірність того, що це число не є дільником числа 20?

4 **9.** У вазі 9 червоних і 6 білих троянд. Вибирають навмання три з них. Яка ймовірність того, що:
1) дві троянди червоні та одна біла;
2) серед троянд є як червоні, так і білі?

Додаткові завдання

3 **10.** Скільки різних непарних п'ятицифрових чисел можна скласти із цифр 0, 1, 2, 4, 6, якщо цифри в числі не повторюються?

4 **11.** Відомо, що стрілець з лука влучає у «10» з імовірністю, більшою за 0,6, але меншою ніж 0,7. Скільки приблизно могло бути виконано пострілів під час тренування, якщо стрілець зробив 4 промахи?

Українки в математиці

Ніна Опанасівна Вірченко, народилася у 1930 році у Черкаській області. Доктор фізико-математичних наук, професорка кафедри вищої математики НТУУ «КПІ», одна з небагатьох жінок у світі, яка дістала міжнародне визнання в галузі математичної фізики. Непростий життєвий шлях випав на її долю. У 1948 році її було заарештовано з політичних мотивів та зіслано до ГУЛАГу. На час арешту Ніна Опанасівна була 18-річною студенткою механіко-математичного факультету Київського університету імені Т.Г. Шевченка (КДУ, нині КНУ імені Тараса Шевченка). Майже 6 років провела вона у Тайшетських таборах Східного Сибіру. Але табори не зламали її, і після багаторічної розлуки з математикою вона у 1956 році поновлює навчання в університеті. У 1955–1958 роках викладала математику та фізику у школах України, а після закінчення аспірантури і захисту у 1964 році кандидатської дисертації працювала викладачем в КДУ. З 1974 року починає працювати і досі працює у Київському політехнічному інституті (нині НТУУ «КПІ»).

Саме Ніна Опанасівна Вірченко стала організатором низки громадських ініціатив щодо увіковічення пам'яті одного з найвизначніших українських математиків Михайла Кравчука. Це й Міжнародні конференції ім. М. Кравчука, відкриття у 2003 році пам'ятника Кравчукові на території НТУУ «КПІ».

Ніна Опанасівна багато разів відзначалася державними нагородами в області науки і техніки та громадської діяльності. Вона є членом наукового Товариства ім. Тараса Шевченка, Американського, Австралійського, Бельгійського, Единбурзького, Лондонського і Всеукраїнського математичних товариств, Соросівський професор. Ніна Опанасівна одночасно є і акторкою, і героїнею першої з книг «Українки в історії», про неї знято документальний фільм «Ужма».

Вона сповнена енергії та натхнення...

ЧАСТИНА II

ГЕОМЕТРІЯ

РОЗДІЛ 1

МНОГОГРАННИКИ

У ЦЬОМУ РОЗДІЛІ ВИ:

- ***згадаєте*** деякі основні геометричні тіла (прямокутний паралелепіпед, куб, піраміду);
- ***дізнаєтеся*** про многогранники, призму;
- ***навчитеся*** будувати зображення вищезазначених тіл, їх елементів і найпростіших перерізів; обчислювати основні елементи зазначених тіл, площі їх бічних і повних поверхонь.

§ 1. МНОГОГРАННИКИ. ПРИЗМА

У стереометрії вивчатимемо фігури у просторі, які прийнято називати *тілами* (або *геометричними тілами*). Геометричне тіло можна уявити як об'єднання частини простору, зайнятої фізичним тілом, та поверхні, яка обмежує цю частину простору.

Протягом навчання у школі розглядатимемо два види геометричних тіл: *многогранники* і *тіла обертання*.

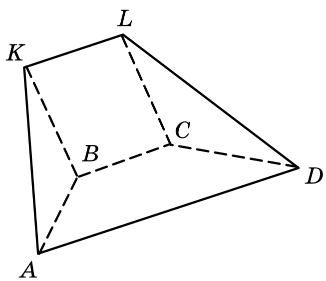
1. Многогранники

У попередніх класах ви вже ознайомилися з прямокутним паралелепіпедом, кубом, пірамідою. Усі ці тіла є прикладами многогранників.

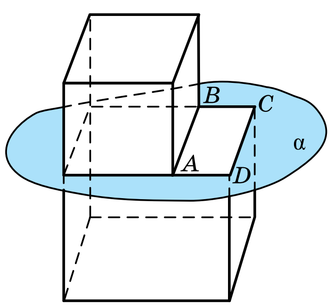
Многогранником **називають тіло, поверхня якого складається зі скінченної кількості плоских многокутників.**

На малюнку 1.1 многогранник, поверхня якого складається з трапецій $ABCD$ і $AKLD$; трикутників ABK і CLD та паралелограма $BKLC$. Многокутники, які обмежують многогранник, називають *гранями*, їх сторони – *ребрами*, а кінці ребер – *вершинами* многогранника. Гранями многогранника, зображеного на малюнку 1.1, є многокутники $ABCD$, $AKLD$, ABK, CLD, $BKLC$; ребрами – відрізки AB, BC, CD, DA, BK, CL, AK, KL і LD; вершинами – точки A, B, C, D, K і L.

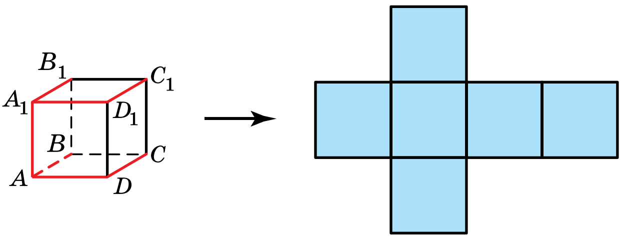
Многогранники бувають *опуклі* та *неопуклі*. Найпростіші многогранники – опуклі. Многогранник називають *опуклим*, якщо він розміщений по один бік від площини кожної його грані. На малюнку 1.1 зображено опуклий многогранник. Зауважимо, що всі грані опуклого многогранника є опуклими многокутниками. На малюнку 1.2 зображено неопуклий многогранник. Площина α, якій належить грань $ABCD$ цього многогранника, розбиває його на дві частини.



Мал. 1.1



Мал. 1.2



Мал. 1.3

Якщо поверхню многогранника розрізати по деяких його ребрах і розгорнути у площину однієї з його граней, то отримаємо *розгортку* даного многогранника.

Якщо куб розрізати по ребрах AB, CD, A_1B_1, C_1D_1, AD, AA_1, A_1D_1, то отримаємо його розгортку (мал. 1.3).

Площа поверхні многогранника – це сума площ усіх його граней. Площа поверхні многогранника дорівнює площі розгортки цього многогранника.

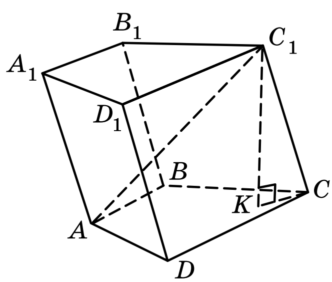
У курсі шкільної геометрії розглядатимемо найпростіші многогранники: призми і піраміди.

2. Призма

Один з найпростіших многогранників – *призма*. З деякими видами призм (прямою призмою, паралелепіпедом, кубом) ви ознайомилися в попередніх класах. Прикладами призми є коробка з-під взуття, кузов вантажівки, шестигранний олівець тощо.

Призмою **називають многогранник, у якого дві грані рівні (їх називають** ***основами*****) та їх відповідні сторони паралельні, а інші грані (бічні) – паралелограми, у кожного з яких дві протилежні сторони є сторонами основ.**

Призму прийнято називати за назвою її основ, так на малюнку 1.4 зображено призму $ABCDA_1B_1C_1D_1$. За ознакою паралельності площин маємо властивість призми: *основи призми паралельні*. Грані призми, які не є гранями основ, називають *бічними гранями призми*, а сторони бічних граней, які не належать основам, – *бічними ребрами призми*. На малюнку 1.4 паралелограми AA_1D_1D, AA_1B_1B, BB_1C_1C і CC_1D_1D – бічні грані призми; AA_1, BB_1, CC_1 і DD_1 – бічні ребра призми. Зрозуміло, що *всі бічні ребра призми рівні та паралельні*.



Мал. 1.4

Призму називають *n*-кутною, якщо її основою є *n*-кутник.

На малюнку 1.4 зображено чотирикутну призму.

Перпендикуляр, проведений з деякої точки однієї основи до площини іншої основи, називають *висотою* призми.

На малюнку 1.4: C_1K – висота призми $ABCDA_1B_1C_1D_1$.

Відрізок, що сполучає дві вершини призми, які не належать одній грані, називають *діагоналлю* призми.

На малюнку 1.4: C_1A – діагональ призми $ABCDA_1B_1C_1D_1$.

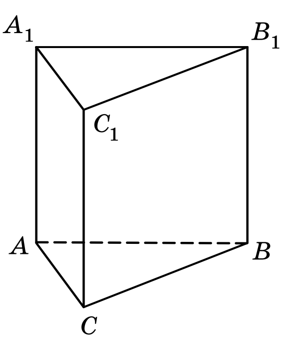
Призму називають *прямою*, якщо її бічні ребра перпендикулярні до основ, у протилежному випадку призму називають *похилою*.

На малюнку 1.4 зображено похилу чотирикутну призму, а на малюнку 1.5 – пряму трикутну призму. Зрозуміло, що *бічні грані прямої призми – прямокутники, а висота прямої призми дорівнює її бічному ребру*.

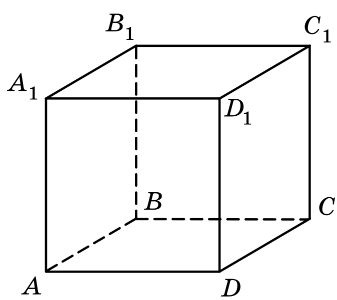
***Пряму* призму називають *правильною*, якщо її основи – правильні многокутники.**

На малюнку **1.6** зображено правильну чотирикутну призму $ABCDA_1B_1C_1D_1$. У правильній призмі всі бічні грані – рівні прямокутники.

***Площею повної поверхні призми* називають суму площ усіх її граней, а *площею бічної поверхні призми* – суму площ її бічних граней.**



Мал. 1.5



Мал. 1.6

Площа $S_{\text{повн}}$ повної поверхні призми виражається сумою площі $S_{\text{бічн}}$ її бічної поверхні та площ $S_{\text{осн}}$ основ призми за формулою:

$$S_{\text{повн}} = S_{\text{бічн}} + 2S_{\text{осн}}.$$

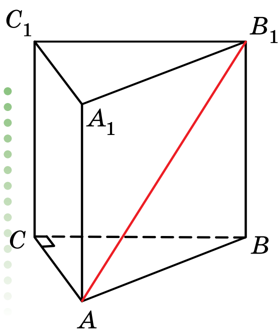
Т Теорема (про площу бічної поверхні прямої призми). **Площа бічної поверхні прямої призми дорівнює добутку периметра основи на висоту призми, тобто на довжину її бічного ребра.**

Доведення. Нехай a_1, a_2, ..., a_n – сторони основи, а l – довжина бічного ребра прямої призми. Враховуючи, що всі бічні грані прямокутники, маємо:

$$S_{\text{бічн}} = a_1l + a_2l + \ldots + a_nl = (a_1 + a_2 + \ldots + a_n)l = Pl,$$

де $P = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ – периметр основи. ■

Задача 1. В основі прямої призми лежить прямокутний трикутник з катетами 3 см і 4 см. Знайти довжину діагоналі грані призми, що містить гіпотенузу трикутника, якщо висота призми дорівнює 12 см.



Мал. 1.7

Розв'язання. 1) Нехай $ABCA_1B_1C_1$ – задана трикутна призма, $AC = 3$ см, $BC = 4$ см, $\angle C = 90°$, $BB_1 = 12$ см (мал. 1.7).

2) У $\triangle ABC$ ($\angle C = 90°$): $AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$ (см).

3) У $\triangle BB_1A$ ($\angle B = 90°$): $AB_1 = \sqrt{AB^2 + BB_1^2} = \sqrt{5^2 + 12^2} = 13$ (см).

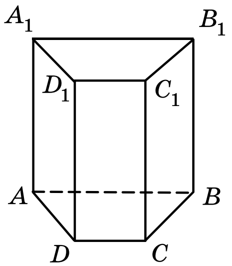
Відповідь. 13 см.

Задача 2. В основі прямої призми лежить рівнобічна трапеція, більша основа якої дорівнює 11 см, бічна сторона – 6 см, а кути при основі 60°. Знайти площу бічної поверхні призми, якщо її висота дорівнює меншій основі трапеції.

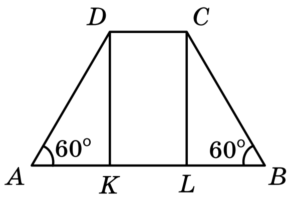
Розв'язання. 1) Нехай $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – задана чотирикутна призма, $AB = 11$ см, $AD = BC = 6$ см, $\angle A = \angle B = 60°$ (мал. 1.8).

2) Виконаємо планіметричний малюнок трапеції $ABCD$, що лежить в основі призми (мал. 1.9), та проведемо в ній висоти DK і CL.

3) У $\triangle ADK$: $\cos A = \dfrac{AK}{AD}$, $AK = 6\cos 60° = 3$ (см); аналогічно $BL = 3$ (см).



Мал. 1.8



Мал. 1.9

4) $KDCL$ – прямокутник, тому $DC = KL = AB - 2AK = 11 - 2 \cdot 3 = 5$ (см).
5) Висота BB_1 призми за умовою дорівнює меншій основі трапеції, тобто DC. Отже, $BB_1 = 5$ (см).
6) $S_{\text{бічн}} = Pl$, $P = 11 + 2 \cdot 6 + 5 = 28$ (см), $l = 5$ (см).
7) $S_{\text{бічн}} = 28 \cdot 5 = 140$ (см^2).

Відповідь. 140 см^2.

Задача 3. Бічне ребро похилої призми дорівнює 16 см і утворює з площиною основи кут 60°. Знайти висоту призми.

Розв'язання. 1) Оскільки многокутник, що лежить в основі призми, не має значення, використаємо малюнок 1.4. За умовою $CC_1 = 16$ см, C_1K – висота призми.
2) CK – проекція C_1C на площину основи ABC. Тому $\angle C_1CK$ – кут, що утворює бічне ребро CC_1 з площиною основи ABC, за умовою $\angle C_1CK = 60°$.
3) У $\triangle CC_1K$ ($\angle K = 90°$): $\sin C = \dfrac{C_1K}{CC_1}$, $C_1K = CC_1 \sin 60° = 16 \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} = 8\sqrt{3}$ (см).

Відповідь. $8\sqrt{3}$ см.

3. Поняття перерізу многогранника

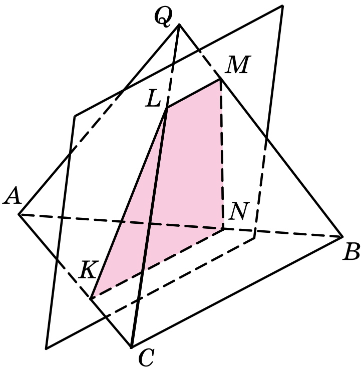
Під час розв'язування деяких геометричних задач, пов'язаних з многогранниками, корисно вміти будувати на малюнку *перерізи* многогранника різними площинами.

Що ж розуміють під поняттям перерізу многогранника?

Січною площиною многогранника будемо називати будь-яку площину, по обидва боки від якої є точки даного многогранника. Січна площина перетинає грані многогранника по відрізках.

Многокутник, сторонами якого є ці відрізки, називають *перерізом многогранника*.

На малюнку 1.10 чотирикутник $KLMN$ є перерізом трикутної піраміди $QABC$.



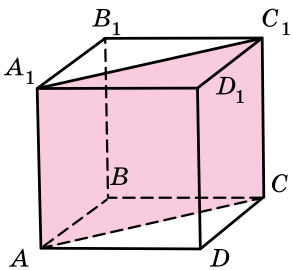
Мал. 1.10

Зауважимо, що в задачах січну площину задають одним з відомих вам способів: або трьома точками, що не лежать на одній прямій, або прямою і точкою, що не лежить на ній, або двома прямими, що перетинаються. Для побудови перерізу достатньо побудувати точки перетину січної площини з ребрами многогранника, після чого провести відрізки, що сполучають кожні дві побудовані точки, що належать одній і тій самій грані.

Далі розглянемо найпростіші перерізи призми.

4. Побудова перерізів призми

Переріз призми, який проходить через два бічних ребра, що не належать одній грані, називають *діагональним перерізом*.



Мал. 1.11

На малюнку 1.11 AA_1C_1C – діагональний переріз прямої призми. Цей переріз є прямокутником, одна зі сторін якого – діагональ основи AC, а інша – бічне ребро AA_1. У похилій призмі діагональним перерізом є паралелограм.

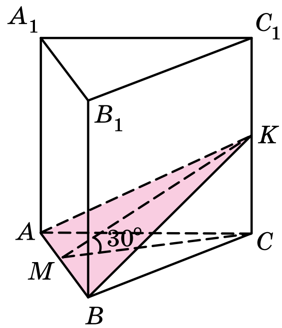
Іноді в задачах потрібно не тільки побудувати переріз, а й знайти його площу чи периметр або використати переріз з іншою метою.

Задача 4. В основі прямої призми лежить ромб зі стороною 8 см і гострим кутом 60°. Знайти площу діагонального перерізу призми, однією зі сторін якого є більша діагональ ромба, якщо бічне ребро призми дорівнює $\sqrt{3}$ см.

Розв'язання. 1) Нехай $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – призма, в основі якої лежить ромб $ABCD$, $AB = 8$ см, $\angle A = 60°$, AC – більша діагональ ромба (мал. 1.11). Тоді ACC_1A_1 – діагональний переріз, площу якого потрібно знайти. $CC_1 = \sqrt{3}$ см (за умовою).
2) $\angle ADC = 180° - 60° = 120°$.
3) У $\triangle ADC$ за теоремою косинусів:
$AC^2 = AD^2 + DC^2 - 2 \cdot AD \cdot DC \cdot \cos D$;
$AC = \sqrt{8^2 + 8^2 - 2 \cdot 8^2 \cdot \cos 120°} = 8\sqrt{3}$ (см).
4) Тоді $S_{AA_1C_1C} = AC \cdot CC_1 = 8\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = 24$ (см^2).
Відповідь. 24 см^2.

Часто в задачах розглядають перерізи призми, що проходять через сторону основи призми і перетинають бічні ребра призми.

Задача 5. В основі прямої призми лежить рівносторонній трикутник, сторона якого дорівнює 4 см. Через сторону трикутника проведено переріз, який утворює кут 30° з площиною основи і перетинає бічне ребро в його середині. Знайти площу повної поверхні призми.



Мал. 1.12

Розв'язання. 1) Нехай $ABCA_1B_1C_1$ – трикутна призма, основа якої – рівносторонній трикутник ABC, $AB = 4$ см (мал. 1.12).

2) Через сторону AB основи трикутника проведено переріз ABK, де K – середина ребра CC_1.

3) Проведемо у $\triangle ABC$ медіану CM, яка є також висотою цього трикутника; $CM = \dfrac{AB\sqrt{3}}{2} = \dfrac{4\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$ (см).

4) Оскільки $CM \perp AB$ і CM є проекцією KM на площину ABC, то за теоремою про три перпендикуляри матимемо: $KM \perp AB$. Тоді $\angle KMC$ – кут, що утворює переріз з площиною основи. За умовою $\angle KMC = 30°$.

5) У $\triangle KMC$ ($\angle C = 90°$): $\mathrm{tg} M = \dfrac{KC}{MC}$, $KC = 2\sqrt{3} \cdot \mathrm{tg}30° = 2\sqrt{3} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{3}} = 2$ (см).

6) Оскільки K – середина CC_1, то $CC_1 = 2KC = 2 \cdot 2 = 4$ (см).

7) $S_{повн} = S_{бічн} + 2S_{осн}$.

8) $S_{осн} = \dfrac{AB^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{4^2\sqrt{3}}{4} = 4\sqrt{3}$ (см^2).

9) $S_{бічн} = Pl = 3 \cdot 4 \cdot 4 = 48$ (см^2).

10) Тоді $S_{повн} = 48 + 2 \cdot 4\sqrt{3} = 48 + 8\sqrt{3}$ (см^2).

Відповідь. $48 + 8\sqrt{3}$ см^2.

А ще раніше...

Евклід визначив призму як «геометричну фігуру, що міститься між двома рівними і паралельними площинами (основами) та бічними гранями – паралелограмами».

Зверніть увагу, що Евклід використовував термін «площина» як у широкому сенсі (розглядаючи її необмежену в усіх напрямках), так і в сенсі скінченної, обмеженої її частини, зокрема грані.

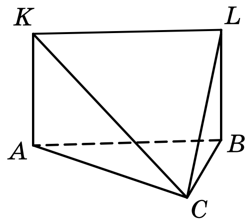
У XVIII ст. англійський математик Брук Тейлор (1685–1731) дав таке визначення призми: «це многогранник, у якого всі грані, окрім двох, паралельні одній прямій».

● Що називають многогранником? ● Що називають гранями, ребрами, вершинами многогранника? ● Який многогранник називають опуклим? ● Як отримати розгортку многогранника? ● Що називають призмою? ● Що називають основами призми, бічними гранями призми, бічними ребрами призми? ● Які властивості основ і бічних ребер призми ви знаєте? ● Яку призму називають n-кутною? ● Що називають висотою призми, діагоналлю призми? ● Яку призму називають прямою, а яку – похилою? ● Яку призму називають правильною? ● Що називають площею повної поверхні призми, а що – площею бічної поверхні призми? ● Сформулюйте й доведіть теорему про площу бічної поверхні прямої призми. ● Що називають січною площиною многогранника? ● Що розуміють під перерізом многогранника? ● Який переріз призми називають діагональним?

Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

1.1. (*Усно.*) Наведіть приклади многогранників з навколишнього середовища. Які з них опуклі, а які – неопуклі?

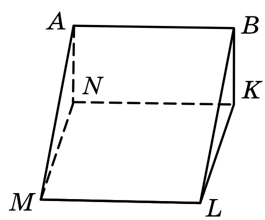
1.2. (*Усно.*) Наведіть приклади тіл з навколишнього середовища, що мають форму призми.



Мал. 1.13

1.3. Укажіть грані, ребра та вершини многогранника, зображеного на малюнку 1.13.

1.4. Укажіть грані, ребра та вершини многогранника, зображеного на малюнку 1.14.



Мал. 1.14

1.5. Скільки ребер і граней у чотирикутній призмі?

1.6. Скільки ребер і граней у п'ятикутній призмі?

1.7. У призмі площа основи дорівнює 5 см^2, а площа бічної поверхні – 12 см^2. Знайдіть площу повної поверхні призми.

1.8. У призмі площа бічної поверхні дорівнює 10 см^2, а площа основи – 4 см^2. Знайдіть площу повної поверхні призми.

1.9. У трикутній призмі площа основи дорівнює 6 см^2, а площі бічних граней – 9 см^2, 12 см^2 і 15 см^2. Знайдіть площу повної поверхні призми.

1.10. У чотирикутній призмі площа основи дорівнює 16 см^2, а площа кожної з бічних граней – 8 см^2. Знайдіть площу повної поверхні призми.

1.11. Яку найменшу кількість: 1) ребер може мати многогранник; 2) граней може мати многогранник?

1.12. Чи існує многогранник, у якого кількість вершин дорівнює кількості граней? У разі позитивної відповіді намалюйте його.

1.13. Визначте, скільки сторін має многокутник, що лежить в основі призми, якщо в цієї призми 11 граней.

1.14. Призма має 9 граней. Скільки сторін має многокутник, що лежить в основі призми?

1.15. Який многокутник лежить в основі призми, якщо вона має 12 ребер?

1.16. Який многокутник лежить в основі призми, якщо вона має 18 ребер?

1.17. В цирку використовують тумбу для тварин, що має форму правильної трикутної призми, сторона основи якої дорівнює 60 см, а висота – 50 см. Потрібно пофарбувати бічну поверхню цієї призми. Скільки фарби буде використано, якщо на 1 дм^2 поверхні витрачають 3 г фарби?

1.18. Одним з елементів дитячого майданчика є правильна шестикутна призма, сторона основи якої дорівнює 50 см, а висота – 40 см. Потрібно пофарбувати бічну поверхню цієї призми. Скільки фарби буде використано, якщо на 1 дм^2 поверхні витрачають 3 г фарби?

1.19. У правильній трикутній призмі сторона основи дорівнює 4 см, а діагональ бічної грані – 5 см. Знайдіть площу бічної поверхні призми.

1.20. Основою прямої призми є прямокутний трикутник з катетами 6 см і 8 см. Знайдіть площу бічної поверхні призми, якщо її висота дорівнює 5 см.

1.21. Основою прямої призми є прямокутник зі сторонами 6 см і 5 см. Знайдіть висоту призми, якщо площа її повної поверхні дорівнює 126 см^2.

1.22. У правильній чотирикутній призмі сторона основи дорівнює 5 см, а площа повної поверхні призми дорівнює 250 см^2. Знайдіть висоту призми.

1.23. Бічне ребро похилої призми дорівнює 8 см і утворює з площиною основи кут 30°. Знайдіть висоту призми.

1.24. Висота похилої призми дорівнює $2\sqrt{3}$ см. Знайдіть бічне ребро призми, якщо воно утворює з площиною основи кут 60°.

1.25. У правильній чотирикутній призмі сторона основи дорівнює 6 см, а бічне ребро – 3 см. Знайдіть площу діагонального перерізу цієї призми.

1.26. У чотирикутній призмі основою є прямокутник зі сторонами 8 см і 15 см. Знайдіть площу діагонального перерізу призми, якщо її бічне ребро дорівнює 10 см.

1.27. Чи існує призма, у якої:
1) 99 ребер; 2) 101 ребро?

1.28. Чи існує призма, у якої:
1) 68 ребер; 2) 72 ребра?

1.29. Мале підприємство випускає подарункові коробки у вигляді призми, основою якої є ромб з діагоналями 24 см і 10 см. Площа повної поверхні призми дорівнює 760 см^2. Знайдіть висоту цієї коробки.

1.30. Для зберігання картоплі потрібно виготовити короб із кришкою у формі призми заввишки 0,7 м. Основою призми є рівнобічна трапеція з основами 0,4 м, 0,6 м і бічною стороною 0,5 м. Скільки фанери знадобиться для виготовлення короба? Відповідь округліть до десятих квадратних метрів.

1.31. В основі прямої призми лежить рівнобедрений трикутник з основою 6 см і бічною стороною 5 см. Через основу цього трикутника проведено переріз, який утворює кут 45° з площиною основи і перетинає бічне ребро. Знайдіть площу цього перерізу.

1.32. В основі прямої призми лежить рівносторонній трикутник зі стороною 2 дм. Через сторону цього трикутника проведено переріз, що утворює з площиною основи кут 60° і перетинає бічне ребро. Знайдіть площу цього перерізу.

1.33. В основі прямої призми лежить ромб з гострим кутом 60° і площею $8\sqrt{3}$ см^2. Знайдіть площу бічної поверхні цієї призми, якщо діагональ бічної грані нахилена до площини основи під кутом 60°.

1.34. У правильній чотирикутній призмі діагональ основи дорівнює $4\sqrt{2}$ см. Знайдіть площу бічної поверхні цієї призми, якщо діагональ призми утворює з площиною основи кут 45°.

1.35. В основі прямої призми лежить прямокутник, сторони якого відносяться як 1 : 2. Площа бічної поверхні призми дорівнює 90 см^2, а повної поверхні – 126 см^2. Знайдіть висоту призми.

1.36. Основа прямої призми – ромб з гострим кутом 30°. Площа повної поверхні призми дорівнює 33 см^2, а площа її бічної поверхні – 24 см^2. Знайдіть висоту призми.

1.37. В основі похилої призми лежить рівносторонній трикутник зі стороною $8\sqrt{3}$ см. Одна з вершин верхньої основи призми проектується в центр нижньої основи. Знайдіть висоту призми, якщо її бічне ребро дорівнює 10 см.

1.38. В основі похилої призми лежить квадрат зі стороною 10 см. Одна з вершин верхньої основи призми проектується в середину сторони нижньої основи. Знайдіть довжину бічного ребра призми, якщо її висота дорівнює 12 см.

1.39. В основі прямої призми лежить рівнобічна трапеція, основи якої дорівнюють 41 см і 9 см, а бічна сторона – 20 см. Знайдіть площу повної поверхні призми, якщо її бічне ребро дорівнює висоті основи.

1.40. В основі прямої призми лежить прямокутна трапеція з меншою основою 5 см та бічними сторонами 12 см і 20 см. Знайдіть площу повної поверхні призми, якщо її бічне ребро дорівнює меншій діагоналі основи.

4

1.41. Знайдіть відношення площі найменшого діагонального перерізу правильної шестикутної призми до площі його найбільшого діагонального перерізу.

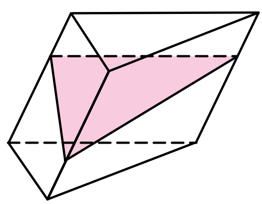
1.42. В основі прямої призми лежить ромб з кутом 60°. Знайдіть відношення площі більшого діагонального перерізу призми до площі меншого діагонального перерізу цієї призми.

1.43. Основою прямої призми є ромб, площа якого дорівнює Q, а менша діагональ – d. Більша діагональ призми нахилена до площини основи під кутом β. Знайдіть площу бічної поверхні призми.

1.44. Площа основи правильної трикутної призми дорівнює $S\sqrt{3}$, а діагональ бічної грані утворює з основою кут α. Знайдіть площу бічної поверхні призми.

1.45. Діагоналі правильної шестикутної призми дорівнюють 17 см і 15 см. Знайдіть площу бічної поверхні цієї призми.

1.46. У похилій призмі проведено переріз, перпендикулярний до бічних ребер, що перетинає всі бічні ребра (мал. 1.15). Доведіть, що бічну поверхню призми $S_{\text{бічн}}$ можна знайти за формулою $S_{\text{бічн}} = P_{\text{п}} \cdot l$, де $P_{\text{п}}$ – периметр перерізу, l – довжина бічного ребра призми.



Мал. 1.15

1.47. У похилій трикутній призмі дві бічні грані взаємно перпендикулярні. Їх спільне бічне ребро знаходиться на відстані 3 см і 4 см від двох інших бічних ребер. Знайдіть довжину бічного ребра призми, якщо площа її бічної поверхні дорівнює 120 см^2.

1.48. Ребро похилої трикутної призми дорівнює 8 см. Дві бічні грані призми взаємно перпендикулярні, а їх спільне бічне ребро знаходиться на відстані 5 см і 12 см від двох інших бічних ребер. Знайдіть площу бічної поверхні призми.

Життєва математика

1.49. Друзі Сергій і Світлана ведуть здоровий спосіб життя та проводять кілька разів на тиждень легкоатлетичне тренування, пробігаючи по колу радіуса 50 м, причому Сергій пробігає 8 кіл, а Світлана – 6 кіл. Швидкість бігу Сергія – 16 км/год, Світлани – 14 км/год. Хто з друзів витрачає більше часу на тренування і на скільки? (Відповідь дайте з точністю до секунди.)

1.50. Потрібно пофарбувати стелю у двох кімнатах: одна з них квадратної форми зі стороною 4 м, а інша – прямокутна з розмірами 5 м і 4 м. Для фарбування 1 м^2 стелі потрібно 240 г фарби. Фарба продається в банках по 2,5 кг. Яку найменшу кількість банок фарби слід для цього купити?

Підготуйтеся до вивчення нового матеріалу

1.51. Скільки ребер, граней, вершин має прямокутний паралелепіпед?

1.52. Знайдіть площу поверхні куба, ребро якого дорівнює:
1) 2 дм; 2) 7 см.

1.53. Знайдіть площу повної поверхні прямокутного паралелепіпеда, виміри якого дорівнюють:
1) 3 см, 5 см і 7 см; 2) 1 дм, 8 см і 60 мм.

Перевірте свою компетентність!

Завдання № 1

1. Перпендикуляр, проведений з деякої точки до площини, дорівнює 5 см, а похила – 12 см. Знайдіть проекцію цієї похилої на площину.

А	Б	В	Г	Д
7 см	8 см	$\sqrt{119}$ см	13 см	інша відповідь

2. При якому значенні m вектори $\vec{a}(m;\ 1;\ -2)$ і $\vec{b}(4;\ 4;\ 2)$ перпендикулярні?

А	Б	В	Г	Д
0	1	2	3	4

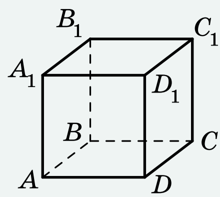
3. На скільки відсотків збільшиться площа прямокутника, якщо дві його паралельні сторони збільшити на 10 %, а дві інші – на 20 %?

А	Б	В	Г	Д
на 10 %	на 15 %	на 20 %	на 30 %	на 32 %

4. MN – діаметр кола, а MK – хорда, яка дорівнює половині діаметра. Знайдіть величину кута KNM.

А	Б	В	Г	Д
15°	30°	45°	60°	75°

5. На малюнку зображено куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. До кожного початку речення (1–4) доберіть його закінчення (А–Д) так, щоб утворилося правильне твердження.



Початок речення

1 Пряма AC...

2 Пряма BB_1...

3 Пряма DC_1...

4 Пряма B_1D_1...

Закінчення речення

А ...перпендикулярна до площини ABC.

Б ...паралельна площині ABC.

В ...належить площині ABC.

Г ...має з площиною ABC лише дві спільні точки.

Д ...утворює з площиною ABC кут 45°.

	А	Б	В	Г	Д
1					
2					
3					
4					

6. Сторони прямокутного трикутника утворюють арифметичну прогресію. Знайдіть тангенс меншого гострого кута цього трикутника.

§ 2. ПАРАЛЕЛЕПІПЕД

У попередніх класах ви ознайомилися з прямокутним паралелепіпедом і кубом. Обидва ці тіла є видами *паралелепіпеда*. Розглянемо паралелепіпед детальніше.

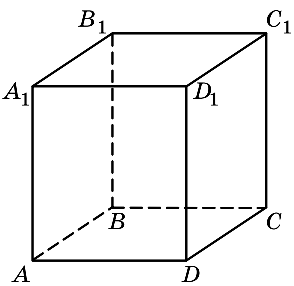
1. Паралелепіпед

***Паралелепіпедом* називають призму, основою якої є паралелограм.**

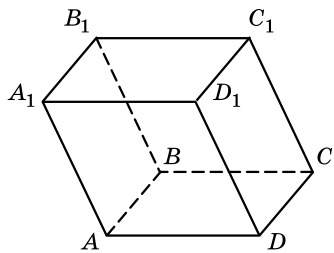
У паралелепіпеда всі грані паралелограми.

Оскільки паралелепіпед є призмою, то всі властивості призми справджуються і для паралелепіпеда.

Паралелепіпед, бічні ребра якого перпендикулярні до площини основи, називають *прямим паралелепіпедом*. Його бічні грані – прямокутники. На малюнку 2.1 зображено прямий паралелепіпед.



Мал. 2.1



Мал. 2.2

Якщо бічні ребра паралелепіпеда не перпендикулярні до площини основи, то паралелепіпед називають *похилим*. На малюнку 2.2 зображено похилий паралелепіпед.

Грані паралелепіпеда, які не мають спільних вершин, називають *протилежними гранями*. На малюнку 2.2 протилежними гранями є грані $ABCD$ і $A_1B_1C_1D_1$, ABB_1A_1 і DCC_1D_1, AA_1D_1D і BB_1C_1C.

Розглянемо *властивості паралелепіпеда*.

Теорема 1 (властивість протилежних граней паралелепіпеда). **Протилежні грані паралелепіпеда паралельні та рівні.**

Доведення. 1) Розглянемо паралелепіпед $ABCDA_1B_1C_1D_1$, зображений на малюнку 2.2. Грані $ABCD$ і $A_1B_1C_1D_1$ цього паралелепіпеда паралельні та рівні, оскільки є основами паралелепіпеда.

2) Покладемо паралелепіпед, наприклад, на грань AA_1D_1D. Тоді грані AA_1D_1D і BB_1C_1C є основами паралелепіпеда. А тому вони паралельні та рівні.

3) Аналогічно доводимо, що паралельними і рівними є грані AA_1B_1B і DD_1C_1C. ■

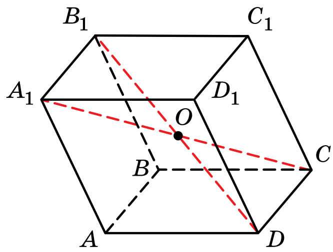
Теорема 2 (властивість діагоналей паралелепіпеда). **Діагоналі паралелепіпеда перетинаються і точкою перетину діляться навпіл.**

Доведення. 1) Розглянемо будь-які дві діагоналі паралелепіпеда, наприклад A_1C і B_1D (мал. 2.3).

2) Оскільки $AB \parallel CD$ і $AB \parallel A_1B_1$, то $CD \parallel A_1B_1$. Тому прямі CD і A_1B_1 лежать в одній площині.

3) Оскільки $AB = CD$ і $AB = A_1B_1$, то $A_1B_1 = CD$.

4) $A_1B_1 \parallel CD$ і $A_1B_1 = CD$. За ознакою чотирикутник A_1B_1CD є паралелограмом. Його діагоналі A_1C і B_1D перетинаються в точці O і цією точкою діляться навпіл.



Мал. 2.3

5) Аналогічно доводять, що діагоналі A_1C і AC_1 перетинаються в точці O (яка є серединою A_1C). Ця точка ділить навпіл і діагональ AC_1. Так само міркуємо і щодо діагоналей A_1C і BD_1.

6) Отже, усі чотири діагоналі паралелограма перетинаються в одній точці і цією точкою діляться навпіл. ■

Задача 1. Основою прямого паралелепіпеда є ромб зі стороною 8 см і тупим кутом 120°. Знайти довжину більшої діагоналі паралелепіпеда, якщо його висота дорівнює 2 см.

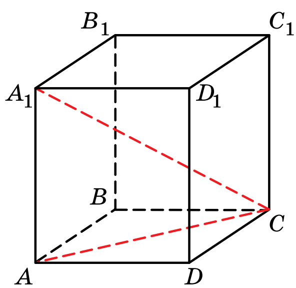
Розв'язання. 1) Нехай на малюнку 2.4 зображено прямий паралелепіпед $ABCDA_1B_1C_1D_1$, $ABCD$ – ромб, $AB = BC = 8$ см, $\angle ABC = 120°$.

2) Оскільки AC є більшою діагоналлю ромба, то A_1C є більшою діагоналлю паралелепіпеда.

3) У $\triangle ABC$ за теоремою косинусів:

$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2 \cdot AB \cdot BC \cdot \cos\angle B$;

$AC = \sqrt{8^2 + 8^2 - 2 \cdot 8^2 \cdot \cos 120°} = 8\sqrt{3}$ (см).



Мал. 2.4

4) У $\triangle AA_1C$ ($\angle A = 90°$):

$A_1C = \sqrt{AA_1{}^2 + AC^2} = \sqrt{(8\sqrt{3})^2 + 2^2} = 14$ (см).

Відповідь. 14 см.

Задача 2. Сторони основи прямого паралелепіпеда дорівнюють 10 см і 17 см, а одна з діагоналей основи 21 см. Більша діагональ паралелепіпеда дорівнює 29 см. Знайти площу бічної поверхні паралелепіпеда.

Розв'язання. 1) Нехай $a = 10$ см і $b = 17$ см – сторони основи, $d_1 = 21$ см – діагональ основи. За властивістю діагоналей паралелограма: $d_1^2 + d_2^2 = 2(a^2 + b^2)$, звідки $d_2^2 = 2(10^2 + 17^2) - 21^2$; $d_2 = \sqrt{337}$ (см). Оскільки $\sqrt{337} < 21$, то більшою діагоналлю паралелепіпеда є та, проекцією якої на площину основи є діагональ основи завдовжки 21 см.

2) $AC = 21$ см, $A_1C = 29$ см (мал. 2.4).

У $\triangle AA_1C$ ($\angle A = 90°$): $AA_1 = \sqrt{A_1C^2 - AC^2} = \sqrt{29^2 - 21^2} = 20$ (см).

3) Оскільки прямий паралелепіпед є видом прямої призми, то площу бічної поверхні $S_{\text{бічн}}$ прямого паралелепіпеда можна знайти за формулою: $S_{\text{бічн}} = Pl$, де P – периметр основи, l – довжина бічного ребра. Маємо: $P = 2(10 + 17) = 54$ (см), $S_{\text{бічн}} = 54 \cdot 20 = 1080$ (см^2).

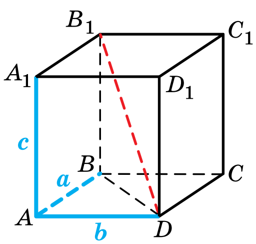
Відповідь. 1080 см^2.

2. *Прямокутний паралелепіпед*

***Прямокутним паралелепіпедом* називають прямий паралелепіпед, основою якого є прямокутник.**

Зауважимо, що всі грані прямокутного паралелепіпеда є прямокутниками, усі двогранні кути – прямими.

Довжини трьох ребер прямокутного паралелепіпеда, які виходять з однієї вершини, називають *вимірами* (або *лінійними вимірами*) *прямокутного паралелепіпеда*.



Мал. 2.5

На малюнку 2.5 $AB = a$, $AD = b$, $AA_1 = c$ – виміри прямокутного паралелепіпеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Зрозуміло, що в цьому прямокутному паралелепіпеді чотири ребра мають довжину a, чотири – довжину b і чотири – довжину c.

На практиці, говорячи про розміри кімнати, що має форму прямокутного паралелепіпеда, замість слова «виміри» природно використовувати слова «довжина», «ширина» та «висота». Зрозуміло, що довжина, ширина та висота кімнати і є її вимірами. У деяких задачах будемо і для прямокутного паралелепіпеда використовувати терміни «довжина», «ширина» та «висота».

Розглянемо теорему, яка пов'язує діагональ прямокутного паралелепіпеда з його лінійними вимірами.

Теорема 3 (формула для обчислення довжини діагоналі прямокутного паралелепіпеда). **Квадрат діагоналі прямокутного паралелепіпеда дорівнює сумі квадратів трьох його вимірів.**

Доведення. 1) Нехай $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – прямокутний паралелепіпед (мал. 2.5), $AB = a$, $AD = b$, $AA_1 = c$, $B_1D = d$.

2) У $\triangle ABD$ ($\angle A = 90°$): $BD^2 = a^2 + b^2$.

3) $BB_1 = AA_1 = c$.

4) У $\triangle BB_1D$ ($\angle B = 90°$): $B_1D^2 = BD^2 + BB_1^2 = a^2 + b^2 + c^2$.

Отже, $d^2 = a^2 + b^2 + c^2$. ■

Зауважимо, що ця теорема є просторовим аналогом планіметричної теореми Піфагора.

Н **Наслідок. Усі чотири діагоналі прямокутного паралелепіпеда рівні.**

! **Прямокутний паралелепіпед, усі три виміри якого рівні, називають *кубом*.**

Усі грані куба – рівні квадрати.

Задача 3. Довести, що площу повної поверхні $S_{\text{повн}}$ прямокутного паралелепіпеда можна знаходити за формулою $S_{\text{повн}} = 2(ab + ac + bc)$, де a, b, c – виміри прямокутного паралелепіпеда.

Доведення. Площа повної поверхні прямокутного паралелепіпеда складається з двох прямокутників, довжини сторін яких a і b (мал. 2.5), двох прямокутників, довжини сторін яких a і c, та двох прямокутників, довжини сторін яких b і c. Тому

$$S_{\text{повн}} = 2ab + 2ac + 2bc;\ S_{\text{повн}} = 2(ab + ac + bc). \blacksquare$$

Задача 4. Довжини основи прямокутного паралелепіпеда дорівнюють 3 см і 5 см, а діагональ – $\sqrt{38}$ см. Знайти площу повної поверхні паралелепіпеда.

Розв'язання.

1) $a = 3$ см, $b = 5$ см, $d = \sqrt{38}$ см. Маємо: $a^2 + b^2 + c^2 = d^2$; $c^2 = d^2 - (a^2 + b^2)$; $c^2 = (\sqrt{38})^2 - (3^2 + 5^2)$; $c^2 = 4$; $c = 2$ (см).

2) $S_{\text{повн}} = 2(ab + ac + bc) = 2(3 \cdot 5 + 3 \cdot 2 + 5 \cdot 2) = 62$ (см^2).

Відповідь. 62 см^2.

? • Яке тіло називають паралелепіпедом? • Що називають прямим паралелепіпедом, а що – похилим? • Що називають протилежними гранями паралелепіпеда? • Сформулюйте й доведіть властивості паралелепіпеда. • Що називають прямокутним паралелепіпедом? • Що називають вимірами прямокутного паралелепіпеда? • Сформулюйте й доведіть теорему, яка виражає формулу для обчислення довжини діагоналі прямокутного паралелепіпеда. • Що називають кубом?

Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

1 **2.1.** (*Усно.*) Наведіть приклади тіл з навколишнього середовища, що мають форму:

1) паралелепіпеда; 2) куба.

2.2. Чи є паралелепіпедом чотирикутна призма, в основі якої лежить чотирикутник, усі сторони якого відповідно дорівнюють:

1) 3 см, 7 см, 3 см і 6 см; 2) 2 см, 5 см, 2 см і 5 см?

2.3. Чи є паралелепіпедом чотирикутна призма, в основі якої лежить чотирикутник, усі сторони якого відповідно дорівнюють:

1) 7 см, 5 см, 7 см і 5 см; 2) 3 см, 4 см, 3 см і 5 см?

2.4. Чи є паралелепіпедом чотирикутна призма, в основі якої лежить чотирикутник, усі кути якого відповідно дорівнюють:

1) $20°$, $160°$, $20°$ і $160°$; 2) $160°$, $80°$, $90°$ і $90°$?

2.5. Чи є паралелепіпедом чотирикутна призма, в основі якої лежить чотирикутник, усі кути якого відповідно дорівнюють:

1) $70°$, $110°$, $80°$ і $100°$; 2) $130°$, $50°$, $130°$ і $50°$?

2

2.6. На заводі випускають набори кубиків. До набору входить по 10 кубиків червоного, зеленого, синього і жовтого кольорів. Скільки пластмаси кожного кольору знадобиться для одного такого набору, якщо ребро кубика дорівнює 8 см?

2.7. Відома в усьому світі іграшка кубик Рубіка має ребро завдовжки 5,5 см. Знайдіть площу поверхні кубика Рубіка.

2.8. Сторони основи прямокутного паралелепіпеда дорівнюють 2 см і 6 см, а діагональ – 7 см. Знайдіть площу бічної поверхні паралелепіпеда.

2.9. Сторона основи прямокутного паралелепіпеда і його висота дорівнюють по 2 дм, а діагональ – 3 дм. Знайдіть площу бічної поверхні паралелепіпеда.

2.10. Сторони основи прямокутного паралелепіпеда дорівнюють 5 см і 12 см, а висота – 10 см. Знайдіть площу:

1) діагонального перерізу паралелепіпеда;
2) повної поверхні паралелепіпеда.

2.11. Сторони основи прямокутного паралелепіпеда дорівнюють 8 см і 15 см, а висота – 5 см. Знайдіть площу:

1) діагонального перерізу паралелепіпеда;
2) повної поверхні паралелепіпеда.

2.12. Основою прямого паралелепіпеда є паралелограм зі сторонами 3 см і 5 см та тупим кутом $120°$. Знайдіть висоту паралелепіпеда, якщо більша діагональ паралелепіпеда нахилена до площини основи під кутом $45°$.

2.13. Основою прямого паралелепіпеда є ромб зі стороною $4\sqrt{3}$ см і гострим кутом 60°. Менша діагональ паралелепіпеда нахилена до площини основи під кутом 30°. Знайдіть висоту паралелепіпеда.

2.14. Знайдіть виміри прямокутного паралелепіпеда, якщо вони відносяться як 2 : 3 : 4, а сума всіх його ребер дорівнює 72 см.

2.15. Знайдіть виміри прямокутного паралелепіпеда, якщо сума всіх його ребер дорівнює 96 см, а виміри відносяться як 1 : 3 : 4.

2.16. Площа діагонального перерізу прямокутного паралелепіпеда дорівнює 12 см^2, а бічне ребро – 3 см. Знайдіть довжину діагоналі паралелепіпеда.

2.17. Площа діагонального перерізу прямокутного паралелепіпеда дорівнює 60 см^2, а діагональ основи – 12 см. Знайдіть довжину діагоналі паралелепіпеда.

2.18. Сторони основи прямокутного паралелепіпеда дорівнюють 5 см і 8 см. Повна поверхня паралелепіпеда дорівнює 158 см^2. Знайдіть:

1) площу бічної поверхні паралелепіпеда;
2) висоту паралелепіпеда.

2.19. Основою прямокутного паралелепіпеда є квадрат зі стороною 4 см. Площа повної поверхні паралелепіпеда дорівнює 112 см^2. Знайдіть:

1) площу бічної поверхні паралелепіпеда;
2) висоту паралелепіпеда.

3

2.20. Основою прямого паралелепіпеда є квадрат. Діагональ паралелепіпеда дорівнює $2\sqrt{6}$ см, а діагональ бічної грані – $2\sqrt{5}$ см. Знайдіть:

1) сторону основи паралелепіпеда;
2) висоту паралелепіпеда;
3) площу бічної поверхні паралелепіпеда;
4) площу повної поверхні паралелепіпеда;
5) площу діагонального перерізу.

2.21. Основою прямого паралелепіпеда є квадрат. Діагональ бічної грані паралелепіпеда дорівнює 8 см, а діагональ паралелепіпеда – 10 см. Знайдіть:

1) сторону основи паралелепіпеда;
2) висоту паралелепіпеда;
3) площу бічної поверхні паралелепіпеда;
4) площу повної поверхні паралелепіпеда;
5) площу діагонального перерізу паралелепіпеда.

2.22. Знайдіть площу повної поверхні прямокутного паралелепіпеда, якщо його діагональ більша за лінійні виміри на 5 см, 4 см і 1 см.

2.23. Діагональ прямокутного паралелепіпеда більша за сторони основи на 1 см і 9 см, а висота паралелепіпеда дорівнює 3 см. Знайдіть площу повної поверхні паралелепіпеда.

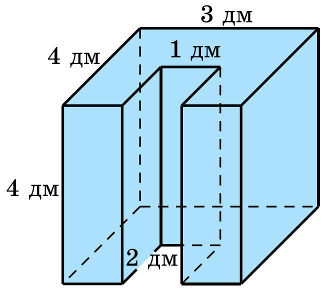
2.24. Сторони основи прямого паралелепіпеда дорівнюють 3 см і 8 см, а тупий кут 120°. Площа меншого з діагональних перерізів паралелепіпеда дорівнює 70 см^2. Знайдіть площу:

1) більшого діагонального перерізу паралелепіпеда;
2) бічної поверхні паралелепіпеда.

2.25. Основою прямого паралелепіпеда є ромб з гострим кутом 60° і стороною 4 см. Площа більшого з діагональних перерізів паралелепіпеда дорівнює $20\sqrt{3}$ см^2. Знайдіть площу:

1) меншого діагонального перерізу паралелепіпеда;
2) бічної поверхні паралелепіпеда.

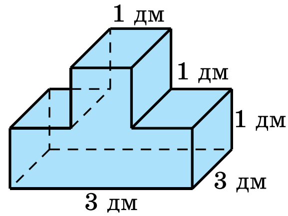
2.26. Деталь, зображену на малюнку 2.6, треба пофарбувати (усі двогранні кути деталі – прямі). Скільки для цього потрібно фарби, якщо на 1 дм^2 поверхні витрачають 3 г фарби?



Мал. 2.6

2.27. Деталь, зображену на малюнку 2.7, треба пофарбувати (усі двогранні кути деталі – прямі). Скільки для цього потрібно фарби, якщо на 1 дм^2 поверхні витрачають 3,5 г фарби?

2.28. Основою прямого паралелепіпеда є ромб з гострим кутом 60° і меншою діагоналлю 6 см. Більша діагональ паралелепіпеда нахилена до площини основи під кутом 30°. Знайдіть площу бічної поверхні паралелепіпеда.



Мал. 2.7

2.29. Сторони основи прямого паралелепіпеда дорівнюють 3 см і 5 см, а кут між ними 120°. Менша діагональ паралелепіпеда дорівнює більшій діагоналі основи. Знайдіть площу бічної поверхні паралелепіпеда.

2.30. Основою прямого паралелепіпеда є ромб, одна з діагоналей якого дорівнює його стороні. Бічне ребро паралелепіпеда дорівнює $5\sqrt{3}$ см. Знайдіть площу бічної поверхні паралелепіпеда, якщо площа його повної поверхні дорівнює $96\sqrt{3}$ см^2.

2.31. Основою прямого паралелепіпеда є ромб з гострим кутом $30°$. Бічне ребро паралелепіпеда дорівнює 5 см, а площа повної поверхні паралелепіпеда – 156 см^2. Знайдіть площу бічної поверхні паралелепіпеда.

2.32. Основою прямого паралелепіпеда є паралелограм з гострим кутом $30°$ і площею 10 см^2. Площі бічних граней паралелепіпеда дорівнюють 35 см^2 і 28 см^2. Знайдіть висоту паралелепіпеда.

2.33. Основою прямого паралелепіпеда є ромб, площа якого 12 см^2. Площі діагональних перерізів паралелепіпеда дорівнюють 20 см^2 і 30 см^2. Знайдіть висоту паралелепіпеда.

2.34. Бічне ребро AA_1 похилого паралелепіпеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ утворює рівні гострі кути з ребрами AB і AD цього паралелепіпеда. A_1K – висота паралелепіпеда. Доведіть, що точка K належить бісектрисі кута BAD.

2.35. Основою похилого паралелепіпеда є ромб з гострим кутом $60°$. Бічне ребро, що виходить з вершини цього кута, утворює зі сторонами кута кути по $45°$. Знайдіть висоту паралелепіпеда, якщо його бічне ребро дорівнює $3\sqrt{3}$ см.

2.36. Основою похилого паралелепіпеда є квадрат, а бічне ребро утворює зі сторонами основи рівні кути по $60°$. Знайдіть висоту паралелепіпеда, якщо його бічне ребро дорівнює 4 см.

2.37. Діагоналі граней прямокутного паралелепіпеда дорівнюють 5 см, 6 см і 7 см. Знайдіть довжину діагоналі паралелепіпеда.

Життєва математика

2.38. У магазині є три види плитки для підлоги:

Вид плитки	Ціна однієї плитки
Квадратна плитка зі стороною 2 дм	24 грн
Плитка, що має довжину 2 дм і ширину 1 дм	13 грн
Квадратна плитка зі стороною 3 дм	50 грн

У кухні, довжина якої 6 м, а ширина 3 м, потрібно покрити підлогу плиткою. Яку плитку краще придбати, щоб затрати на покриття підлоги були найменші? Обчисліть ці витрати.

2.39. Відомо, що 1 га лісу очищує за рік 18 000 000 м^3 повітря. Скільки кубічних метрів повітря очистить за рік ліс площею:

1) 4 га; 2) 3 км^2?

Підготуйтеся до вивчення нового матеріалу

2.40. З точки A до площини α проведено перпендикуляр AK і похилу AM. Знайдіть:

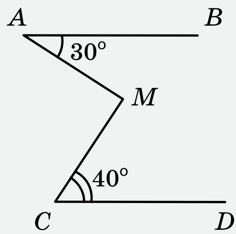
1) AM, якщо $AK = 6$ см, $MK = 8$ см;
2) AK, якщо $MK = 9$ см, $AM = 15$ см.

2.41. З точки O – точки перетину діагоналей квадрата $ABCD$ до його площини побудовано перпендикуляр OK. Знайдіть OK, якщо $AB = 4$ см, $AK = 3$ см.

Перевірте свою компетентність!

Завдання № 2

1. Прямі AB і CD паралельні (див. мал.). Знайдіть градусну міру кута AMC.



А	Б	В	Г	Д
60°	70°	80°	85°	90°

2. Прямі a і b паралельні у просторі. Пряма c перетинає пряму a. Як можуть бути розташовані прямі b і c?

А	Б	В	Г	Д
перетинатися	перетинатися або бути паралельними	бути мимобіжними	перетинатися або бути мимобіжними	бути паралельними або мимобіжними

3. При яких значеннях m і n вектори $\vec{a}(m; 1; -3)$ і $\vec{b}(9; -3; n)$ колінеарні?

А	Б	В	Г	Д
$m = -3$, $n = 9$	$m = 3$, $n = -9$	$m = -3$, $n = -9$	$m = 3$, $n = 9$	інша відповідь

4. При якому значенні x відстань між точками $A(x; 2; -7)$ і $B(0; -1; -1)$ дорівнює 7?

А	Б	В	Г	Д
$x = 2$	$x = -2$	$x = 2$ або $x = -2$	$x = 0$ або $x = 2$	немає таких значень x

5. Установіть відповідність між властивістю правильного многокутника (1–4) та кількістю його сторін (А–Д).

Властивість		*Кількість сторін*	
1	внутрішній кут дорівнює 135°	**А**	8
2	зовнішній кут дорівнює 30°	**Б**	9
3	зовнішній кут на 100° менший, ніж внутрішній	**В**	10
4	кількість діагоналей дорівнює 35	**Г**	11
		Д	12

	А	Б	В	Г	Д
1					
2					
3					
4					

6. Сторони основи прямої трикутної призми 10 см, 17 см і 21 см. Площа перерізу, проведеного через бічне ребро і меншу висоту основи, дорівнює 24 см². Знайдіть довжину бічного ребра призми (у см).

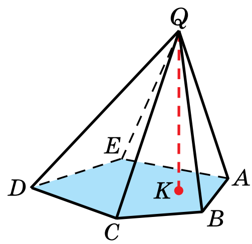
§ 3. ПІРАМІДА

У попередніх класах вам уже траплялася піраміда. Розглянемо це геометричне тіло детальніше.

1. Піраміда

Пірамідою **називають многогранник, у якого одна з граней — довільний многокутник (її називають *основою*), а інші грані — трикутники зі спільною вершиною.**

На малюнку 3.1 зображено піраміду, основою якої є многокутник $ABCDE$. Грані зі спільною вершиною, про які йдеться в означенні піраміди, – трикутники ABP, BCP, CDP, DEP і AEP. Ці грані називають *бічними гранями піраміди*. Їх спільну точку – точку P – називають *вершиною піраміди*. Піраміду, зображену на малюнку 3.1, називають пірамідою $PABCDE$. Ребра піраміди, які сполучають вершину піраміди з вершинами основи піраміди, називають *бічними ребрами піраміди*. На малюнку 3.1 відрізки PA, PB, PC, PD і PE – бічні ребра піраміди.



Мал. 3.1

Піраміду називають *n-кутною*, якщо її основою є *n*-кутник. Трикутну піраміду називають також тетраедром.

На малюнку 3.1 зображено п'ятикутну піраміду.

Перпендикуляр, проведений з вершини піраміди до площини основи, називають *висотою піраміди*.

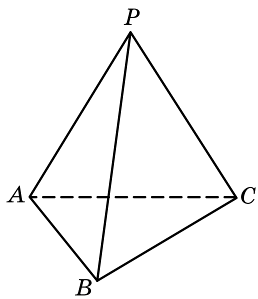
На малюнку 3.1 відрізок PK є висотою піраміди, точка K – *основа висоти*.

***Площа повної поверхні піраміди* дорівнює сумі площ усіх її граней, а *площа бічної поверхні піраміди* – сумі площ її бічних граней.**

Площа $S_{\text{повн}}$ повної поверхні піраміди виражається через площу $S_{\text{бічн}}$ її бічної поверхні та площу $S_{\text{осн}}$ основи піраміди формулою:

$$S_{\text{повн}} = S_{\text{бічн}} + S_{\text{осн}}.$$

Задача 1. Усі плоскі кути при вершині тетраедра по 30°. Знайти площу бічної поверхні цього тетраедра, якщо його бічні ребра дорівнюють 2 см, 3 см і 4 см.



Мал. 3.2

Розв'язання. 1) На малюнку 3.2 зображено тетраедр $PABC$. За умовою: $\angle APB = \angle BPC = \angle APC = 30°$, $PA = 2$ см, $PB = 3$ см, $PC = 4$ см.

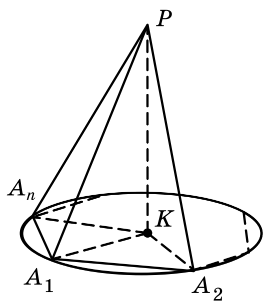
2) $S_{\text{бічн}} = S_{PAB} + S_{PBC} + S_{PAC} = \frac{1}{2} \cdot PA \times$

$\times PB \cdot \sin\angle APB + \frac{1}{2} \cdot PB \cdot PC \cdot \sin\angle BPC + \frac{1}{2} \times$

$\times PA \cdot PC \cdot \sin\angle APC = \frac{1}{2} \cdot \sin 30° \cdot (2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + 2 \cdot 4) = 6{,}5$ (см^2).

Відповідь. 6,5 см^2.

Задача 2. Довести, що коли в піраміді виконується одна з двох таких умов: усі бічні ребра утворюють з площиною основи рівні кути або довжини всіх бічних ребер рівні, то основою висоти піраміди є центр кола, описаного навколо основи піраміди.



Мал. 3.3

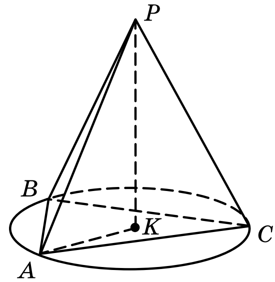
Доведення. 1) Нехай $PA_1A_2...A_n$ – задана піраміда, точка K – основа висоти PK (мал. 3.3).

2) A_1K – проекція бічного ребра A_1P на площину основи, тому $\angle PA_1K$ – кут, що утворює бічне ребро PA_1 з площиною основи. Аналогічно $\angle PA_2K$ – кут, що утворює бічне ребро PA_2 з площиною основи, ..., $\angle PA_nK$ – кут, що утворює бічне ребро PA_n з площиною основи.

3) Якщо $\angle PA_1K = \angle PA_2K = ... = \angle PA_nK$, то $\triangle PA_1K = \triangle PA_2K = ... = \triangle PA_nK$ (за катетом і протилежним гострим кутом). Якщо $PA_1 = PA_2 = ... = PA_n$, то $\triangle PA_1K = \triangle PA_2K = ... = \triangle PA_nK$ (за катетом і гіпотенузою). В обох випадках матимемо висновок про те, що $KA_1 = KA_2 = ... = KA_n$.

4) Отже, точка K належить площині основи піраміди і рівновіддалена від усіх вершин основи. Тому точка K – центр кола, описаного навколо основи. ■

Задача 3. Кожне з бічних ребер тетраедра дорівнює $\frac{65}{8}$ см. Основою піраміди є трикутник зі сторонами 5 см, 5 см і 6 см. Знайти висоту піраміди.



Мал. 3.4

Розв'язання. 1) Нехай $PABC$ – тетраедр (мал. 3.4), який задано в умові задачі, $PA = PB = PC = \frac{65}{8}$ см, $AB = AC = 5$ см, $BC = 6$ см, PK – висота тетраедра.

2) Оскільки всі бічні ребра тетраедра рівні, то точка K – центр кола, описаного навколо трикутника ABC, $AK = R$ – радіус кола.

3) Використаємо формулу $R = \frac{abc}{4S}$, де a, b, c – сторони трикутника, S – його площа.

4) Площу трикутника можна знайти за формулою Герона: $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, де $p = \frac{a+b+c}{2}$ – півпериметр трикутника. Маємо:

$$p = \frac{5+5+6}{2} = 8 \text{ (см)}, \; S = \sqrt{8(8-5)(8-5)(8-6)} = 12 \text{ (см}^2\text{)}.$$

5) Тоді $R = \frac{5 \cdot 5 \cdot 6}{4 \cdot 12} = \frac{25}{8}$ (см).

6) У $\triangle APK$ ($\angle K = 90°$):

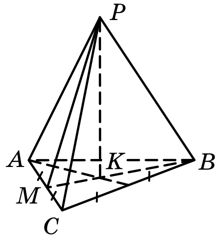
$$PK = \sqrt{AP^2 - AK^2} = \sqrt{\left(\frac{65}{8}\right)^2 - \left(\frac{25}{8}\right)^2} = \sqrt{\frac{225}{4}} = \frac{15}{2} = 7{,}5 \text{ (см)}.$$

Відповідь. 7,5 см.

2. Правильна піраміда

***Піраміду* називають *правильною*, якщо її основою є правильний многокутник, а основа висоти піраміди збігається із центром цього многокутника.**

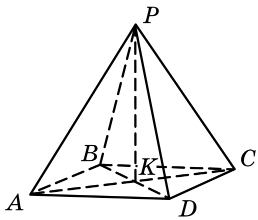
Нагадаємо, що центром правильного многокутника називають центр описаного навколо нього (або вписаного в нього) кола. На малюнку 3.5 зображено правильну трикутну піраміду, а на малюнку 3.6 – правильну чотирикутну піраміду. Висота кожної піраміди – відрізок PK, точка K – центр правильного многокутника, що лежить в основі піраміди.



Мал. 3.5

Віссю правильної піраміди називають пряму, яка містить її висоту.

Оскільки $AK = BK = CK = DK$ (мал. 3.6), то $\triangle PKA = \triangle PKB = \triangle PKC = \triangle PKD$ (за двома катетами), тому $PA = PB = PC = PD$. Отже,



Мал. 3.6

усі бічні ребра правильної піраміди рівні.

Оскільки $AB = BC = CD = DA$, то $\triangle PAB = \triangle PBC = \triangle PCD = \triangle PDA$ (за трьома сторонами). Отже,

усі бічні грані правильної піраміди – рівні рівнобедрені трикутники.

Висоту бічної грані правильної піраміди, проведену з її вершини, називають *апофемою піраміди*.

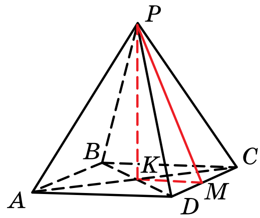
На малюнку 3.5 PM – висота бічної грані PAC, PM – одна з апофем піраміди. Зрозуміло, що всі апофеми правильної піраміди рівні між собою. Якщо піраміда не є правильною, то апофем вона не має.

Теорема 1 (про площу бічної поверхні правильної піраміди). **Площа бічної поверхні правильної піраміди дорівнює добутку півпериметра основи на апофему.**

Доведення. Нехай у правильній n-кутній піраміді сторона основи дорівнює a, а апофема – l.

Тоді $S_{\text{бічн}} = n \cdot \frac{al}{2} = \frac{anl}{2} = \frac{an}{2} \cdot l$. Оскільки $an = P$ – периметр основи, то $\frac{an}{2} = p$ – півпериметр основи. Отже, $S_{\text{бічн}} = pl$. ■

Задача 4. Знайти площу повної поверхні правильної чотирикутної піраміди, сторона основи якої дорівнює 6 см, а висота – 4 см.



Мал. 3.7

Розв'язання. 1) На малюнку 3.7 зображено правильну чотирикутну піраміду $PABCD$, $AD = 6$ см – сторона основи, яка є квадратом, $PK = 4$ см – висота піраміди.

2) $S_{\text{повн}} = S_{\text{бічн}} + S_{\text{осн}}$.

3) $S_{\text{осн}} = AD^2 = 6^2 = 36$ (см^2).

4) PM – висота і медіана $\triangle PDC$. Оскільки M – середина CD, а K – середина AC, то KM – середня лінія трикутника ACD. Тому $KM = \dfrac{AD}{2} = \dfrac{6}{2} = 3$ (см).

5) У $\triangle PKM$ ($\angle K = 90°$): $PM = \sqrt{PK^2 + KM^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$ (см).

6) $S_{\text{бічн}} = pl = \dfrac{4 \cdot 6}{2} \cdot 5 = 60$ (см^2).

7) $S_{\text{повн}} = 60 + 36 = 96$ (см^2).

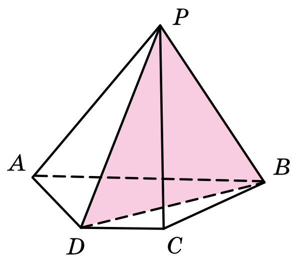
Відповідь. 96 см^2.

3. Побудова перерізів піраміди

Розглянемо найпростіші перерізи піраміди.

Переріз піраміди, який проходить через два бічних ребра, що не належать одній грані, називають *діагональним перерізом*.

На малюнку 3.8 BPD – діагональний переріз чотирикутної піраміди $PABCD$. Діагональні перерізи піраміди – трикутники, однією з вершин яких є вершина піраміди, а протилежна їй сторона – діагональ основи.



Мал. 3.8

Задача 5. Знайти периметр діагонального перерізу правильної чотирикутної піраміди, сторона основи якої дорівнює $5\sqrt{2}$ см, а бічне ребро – 7 см.

Розв'язання. 1) Нехай $PABCD$ – правильна чотирикутна піраміда (мал. 3.7), PAC – її діагональний переріз.

2) За умовою $AD = DC = 5\sqrt{2}$ см, $PA = PC = 7$ см.

3) У $\triangle ADC$ ($\angle D = 90°$):

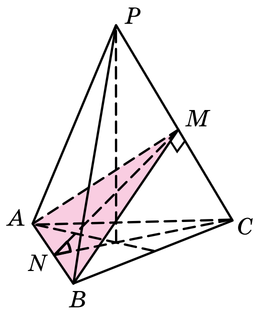
$$AC = \sqrt{AD^2 + DC^2} = \sqrt{\left(5\sqrt{2}\right)^2 + \left(5\sqrt{2}\right)^2} = 10 \text{ (см)}.$$

4) Тоді периметр перерізу $P = 10 + 7 + 7 = 24$ (см).

Відповідь. 24 см.

Часто в задачах розглядають перерізи піраміди, що проходять через сторону основи піраміди і перетинають бічні ребра піраміди.

Задача 6. У правильній трикутній піраміді, сторона основи якої дорівнює 4 см, через сторону основи перпендикулярно до бічного ребра проведено переріз. Знайти площу цього перерізу, якщо він утворює із площиною основи піраміди кут 30°.



Мал. 3.9

Розв'язання. 1) Проведемо у правильній піраміді $PABC$ з основою ABC висоту BM бічної грані BPC (мал. 3.9).

2) $\triangle BMC = \triangle AMC$ (за двома сторонами й кутом між ними), тому $\angle AMC = \angle BMC = 90°$.

3) За ознакою перпендикулярності прямої та площини $(ABM) \perp PC$. Тому ABM – переріз, площу якого треба знайти.

4) CN – висота основи піраміди, $CN \perp AB$, тому за теоремою про три перпендикуляри $MN \perp AB$.

5) За ознакою перпендикулярності прямої та площини маємо $(MNC) \perp AB$, тому $\angle MNC$ – кут, що утворює переріз із площиною основи. За умовою $\angle MNC = 30°$.

6) $S_{ABM} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot MN$.

7) У $\triangle CBN$: $CN = \sqrt{BC^2 - BN^2} = \sqrt{4^2 - 2^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$ (см).

8) У $\triangle NMC$ ($\angle M = 90°$): $\cos\angle N = \frac{MN}{NC}$;

$MN = 2\sqrt{3}\cos 30° = 2\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 3$ (см).

9) Тоді $S_{ABM} = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 3 = 6$ (см²).

Відповідь. 6 см².

А ще раніше...

Піраміду Евклід визначав як «геометричну фігуру, обмежену площинами, які від однієї площини (основи) збігаються в одній точці (вершині)».

Це визначення піддавалося критиці ще в давні часи. Наприклад, Героном, що запропонував таке визначення піраміди: «це фігура, обмежена трикутниками, що збігаються в одній точці, і основою якої є многокутник».

Брук Тейлор визначав піраміду як «многогранник, у якого всі грані, окрім однієї, збігаються в одній точці».

Французький математик А.М. Лежандр (1752–1833) у своїй роботі «Начала геометрії» (1794 р.) так визначав піраміду: «геометричне тіло, утворене трикутниками, які збігаються в одній точці і закінчуються на різних сторонах плоскої основи». Після цього роз'яснювалося поняття основи. Визначення Лежандра було надлишковим, оскільки містило ознаки, які можна вивести з інших.

● Який многокутник називають пірамідою? ● Що називають основою піраміди, бічними гранями піраміди, вершиною піраміди та її бічними ребрами? ● Яку піраміду називають n-кутною? ● Що називають висотою піраміди? ● Що називають площею повної поверхні піраміди, а що – площею бічної поверхні? ● Яку піраміду називають правильною? ● Що називають віссю правильної піраміди? ● Укажіть властивості правильної піраміди. ● Що називають апофемою правильної піраміди? ● Сформулюйте й доведіть теорему про площу бічної поверхні правильної піраміди. ● Що називають діагональним перерізом піраміди?

Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

1

3.1. Накресліть п'ятикутну піраміду $QABCDM$ з вершиною в точці Q. Укажіть її основу, бічні грані, бічні ребра.

3.2. Накресліть чотирикутну піраміду $TKLMN$ з вершиною в точці T. Укажіть її основу, бічні грані, бічні ребра.

3.3. Скільки граней і скільки ребер має семикутна піраміда?

3.4. Скільки граней і скільки ребер має шестикутна піраміда?

3.5. Знайдіть площу бічної поверхні правильної чотирикутної піраміди, якщо площа однієї бічної грані піраміди дорівнює 15 см^2.

3.6. Знайдіть площу бічної поверхні правильної трикутної піраміди, якщо площа однієї бічної грані дорівнює 20 см^2.

3.7. Периметр основи правильної піраміди дорівнює 10 см, а апофема – 3 см. Знайдіть площу бічної поверхні цієї піраміди.

3.8. Апофема правильної піраміди дорівнює 5 см, а периметр основи – 20 см. Знайдіть площу бічної поверхні цієї піраміди.

3.9. Площа повної поверхні піраміди дорівнює 250 см^2, а площа її бічної поверхні – 200 см^2. Знайдіть площу основи піраміди.

3.10. Площа основи піраміди дорівнює 16 см^2, а площа бічної поверхні – 30 см^2. Знайдіть площу повної поверхні піраміди.

3.11. Чи існує піраміда, у якої кількість ребер дорівнює:
1) 13; 2) 16; 3) 2011; 4) 2012?

3.12. Чи існує піраміда, у якої кількість ребер дорівнює:
1) 12; 2) 13; 3) 2008; 4) 2009?

3.13. Сторона основи правильної восьмикутної піраміди дорівнює 5 см, а апофема – 8 см. Знайдіть площу бічної поверхні піраміди.

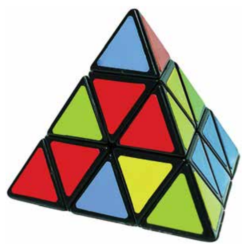
3.14. Апофема правильної шестикутної піраміди дорівнює 7 см, а сторона основи – 4 см. Знайдіть площу бічної поверхні піраміди.

3.15. Апофема правильної трикутної піраміди дорівнює 5 см, а сторона основи – 4 см. Знайдіть площу повної поверхні піраміди.

3.16. Сторона основи правильної чотирикутної піраміди дорівнює 2 см, а апофема – 3 см. Знайдіть площу повної поверхні піраміди.

3.17. Намет являє собою правильну чотирикутну піраміду, усі вісім ребер якої дорівнюють по 2 м. Скільки квадратних метрів тканини треба для пошиття такого намету? (Відповідь округліть до десятих квадратних метрів.)

3.18. Піраміда Мефферта – іграшка, що являє собою тетраедр, усі ребра якого дорівнюють по 9 см. Обчисліть площу повної поверхні цієї іграшки. (Відповідь округліть до десятих квадратних сантиметрів.)



3.19. Знайдіть суму плоских кутів чотирикутної піраміди.

3.20. Знайдіть суму плоских кутів трикутної піраміди.

3.21. Сторона основи правильної трикутної піраміди дорівнює 8 см, а висота – 5 см. Знайдіть площу перерізу піраміди, що проходить через її висоту і бічне ребро.

3.22. Сторона основи правильної чотирикутної піраміди дорівнює $3\sqrt{2}$ см, а висота – 8 см. Знайдіть площу діагонального перерізу цієї піраміди.

3.23. Бічне ребро правильної трикутної піраміди дорівнює $4\sqrt{2}$ см і утворює з площиною основи кут 45°. Знайдіть висоту піраміди та сторону її основи.

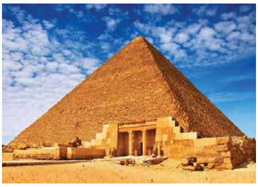
3.24. Бічне ребро правильної чотирикутної піраміди дорівнює $4\sqrt{3}$ см і утворює з площиною основи кут 60°. Знайдіть висоту піраміди і сторону її основи.

3.25. Основою піраміди є прямокутник зі сторонами 6 см і 8 см, а основою висоти піраміди є точка перетину діагоналей цього прямокутника.

1) Доведіть, що всі бічні ребра піраміди рівні між собою.
2) Знайдіть висоту піраміди, якщо її бічне ребро дорівнює 13 см.

3.26. Основою піраміди є ромб з діагоналями 32 см і 18 см, а основою висоти піраміди є точка перетину діагоналей ромба. Знайдіть бічні ребра піраміди, якщо її висота дорівнює 12 см.

3.27. Піраміда Хеопса у Єгипті зараз являє собою правильну чотирикутну піраміду, сторона основи якої приблизно дорівнює 300 м, а бічне ребро – 225 м. Знайдіть висоту піраміди Хеопса з точністю до десятих метра.



3.28. Піраміда Хефрена в Єгипті зараз являє собою правильну чотирикутну піраміду, сторона основи якої приблизно дорівнює 210,5 м, а висота – 136,4 м. Знайдіть довжину бічного ребра піраміди Хефрена з точністю до десятих метра.

3

3.29. У правильній трикутній піраміді бічне ребро дорівнює $4\sqrt{3}$ см і утворює з площиною основи кут $60°$. Знайдіть площу основи піраміди та її апофему.

3.30. У правильній чотирикутній піраміді бічне ребро дорівнює $5\sqrt{2}$ см і утворює з площиною основи кут $45°$. Знайдіть площу основи піраміди та її апофему.

3.31. У правильній чотирикутній піраміді бічні грані утворюють із площиною основи кути $30°$. Знайдіть площу повної поверхні піраміди, якщо апофема піраміди дорівнює $2\sqrt{3}$ см.

3.32. У правильній трикутній піраміді бічні грані утворюють з площиною основи кути $60°$. Знайдіть площу повної поверхні піраміди, якщо сторона основи піраміди дорівнює 4 см.

3.33. Основою піраміди є рівнобедрений трикутник з основою 8 см і бічною стороною 5 см. Бічні грані піраміди, що містять бічні сторони рівнобедреного трикутника, перпендикулярні до основи, а третя – нахилена до основи під кутом $60°$. Знайдіть висоту піраміди.

3.34. Основою піраміди є рівносторонній трикутник зі стороною 8 см. Дві бічні грані піраміди перпендикулярні до площини основи, а третя – нахилена до площини основи під кутом $30°$. Знайдіть висоту піраміди.

3.35. У правильній трикутній піраміді площа бічної поверхні дорівнює 24 см^2, а плоский кут при вершині – 90°. Знайдіть площу основи піраміди.

3.36. У правильній чотирикутній піраміді площа бічної поверхні дорівнює $24\sqrt{3}$ см^2, а плоский кут при вершині – 60°. Знайдіть площу основи піраміди.

3.37. Основою піраміди є трикутник зі сторонами 13 см, 14 см і 15 см. Усі бічні ребра піраміди нахилені до площини основи під одним і тим самим кутом. Знайдіть довжини бічних ребер піраміди, якщо її висота дорівнює 19,5 см.

3.38. Основою піраміди є трикутник зі сторонами 4 см, 13 см і 15 см. Усі бічні ребра піраміди дорівнюють по $12\frac{1}{8}$ см. Знайдіть висоту піраміди.

3.39. Доведіть, що коли в піраміді виконується одна з двох таких умов: усі бічні грані утворюють із площиною основи рівні кути або довжини висот усіх бічних граней рівні, то основою висоти піраміди є центр кола, вписаного в основу піраміди.

3.40. Основою піраміди є прямокутний трикутник з катетами 6 см і 8 см. Усі бічні грані піраміди утворюють із площиною основи кути по 45°. Знайдіть площу повної поверхні піраміди.

3.41. Основою піраміди є трикутник зі сторонами 11 см, 25 см і 30 см. Висоти всіх бічних граней рівні між собою, а висота піраміди дорівнює 3 см. Знайдіть площу повної поверхні піраміди.

3.42. Основою піраміди є ромб з діагоналями 40 см і 30 см. Висоти всіх бічних граней піраміди дорівнюють по 13 см. Знайдіть довжину висоти піраміди.

3.43. Основою піраміди є рівнобедрений трикутник з основою 6 см і бічною стороною 5 см. Бічна грань піраміди, що містить основу рівнобедреного трикутника, перпендикулярна до площини основи, а дві інші – нахилені під кутом 45°. Знайдіть висоту піраміди.

3.44. Основою піраміди є рівносторонній трикутник зі стороною 4 см. Одна з бічних граней піраміди перпендикулярна до площини основи, а дві інші – нахилені під кутом 60°. Знайдіть висоту піраміди.

3.45. Знайдіть бічну поверхню правильної трикутної піраміди, сторона основи якої дорівнює 6 см, якщо площина, яка проходить через сторону основи і середину висоти піраміди, нахилена до площини основи під кутом 60°.

3.46. У правильній трикутній піраміді сторона основи дорівнює 4 см, а плоский кут при вершині 60°. Через одну зі сторін основи перпендикулярно до протилежного бічного ребра проведено переріз. Знайдіть площу цього перерізу.

3.47. У правильній чотирикутній піраміді кут нахилу бічного ребра до площини основи дорівнює 60°. Знайдіть тангенс кута нахилу бічної грані до площини основи.

3.48. У правильній трикутній піраміді кут, що утворює бічна грань із площиною основи, дорівнює 45°. Знайдіть тангенс кута, що утворює бічне ребро із площиною основи.

Життєва математика

3.49. Шкільна ділянка має форму прямокутника, розміри якого 10 м і 15 м. Посередині неї учні та учениці школи розбили квітник так, що навколо нього утворилася доріжка однакової ширини. Знайдіть ширину доріжки, якщо площа квітника становить 126 м^2.

3.50. Щоб поштукатурити стіни кімнати, потрібно купити суху суміш із розрахунку 6 мішків суміші на 5 м^2 поверхні стін. Ширина кімнати становить 3,3 м, довжина – 5 м, а висота – 2,7 м. Кімната має одні двері та одне вікно. Ширина дверей – 0,9 м, висота – 2 м; ширина вікна – 2 м, висота – 1,75 м. Скільки мішків сухої суміші слід купити, якщо стіни потрібно поштукатурити повністю, від підлоги до стелі?

Перевірте свою компетентність!

Завдання № 3

1. Відомо, що пряма b перпендикулярна до площини α, площина α паралельна прямій c. Яким може бути взаємне розміщення прямих b і c?

А	паралельні або перетинаються	**Г**	паралельні або мимобіжні
Б	перетинаються або мимобіжні	**Д**	перетинаються
В	мимобіжні		

2. Одна з основ трапеції на 4 см менша, ніж інша, а середня лінія трапеції дорівнює 7 см. Знайдіть довжину більшої основи трапеції.

А	Б	В	Г	Д
5 см	7 см	8 см	9 см	10 см

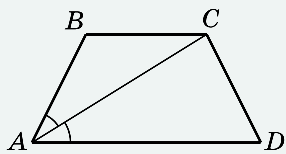
3. Знайдіть площу рівнобедреного трикутника, бічна сторона якого дорівнює 17 см, а висота – 15 см.

А	Б	В	Г	Д
120 см^2	127,5 см^2	225 см^2	240 см^2	інша відповідь

4. Знайдіть координати вектора $\vec{m}$, який дорівнює різниці векторів $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$, якщо $B(-1;\ 2;\ 3)$, $C(0;\ 1;\ -3)$, A – довільна точка простору.

А	$\vec{m}(1;\ -1;\ -6)$	Г	$\vec{m}(-1;\ -1;\ 6)$
Б	$\vec{m}(-1;\ 3;\ 0)$	Д	неможливо знайти
В	$\vec{m}(-1;\ 1;\ 6)$		

5. Одна з основ трапеції на 12 см більша за іншу, а периметр трапеції дорівнює 52 см (див. мал.). Діагональ трапеції ділить гострий кут навпіл. Установіть відповідність між відрізком (1–4) та його довжиною (А–Д).



Відрізок

1 менша основа трапеції

2 більша основа трапеції

3 висота трапеції

4 середня лінія трапеції

Довжина

А 8 см

Б 10 см

В 16 см

Г 20 см

Д 22 см

	А	Б	В	Г	Д
1					
2					
3					
4					

6. У рівнобедреному трикутнику ABC з основою AB бісектриса кута A перетинає сторону BC у точці N, $\angle ANC = 93°$. Знайдіть менший з кутів трикутника (у градусах).

§ 4. ПРАВИЛЬНІ МНОГОГРАННИКИ

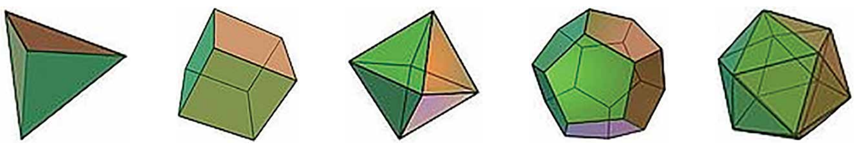
У попередніх класах ви вже вивчали поняття *правильного многокутника*. Нагадаємо, що у планіметрії правильним многокутником називають многокутник, у якого всі сторони рівні та всі кути рівні. У стереометрії аналогічно розглядають *правильні многогранники*.

1. Означення та властивості правильних многогранників

Опуклий *многогранник* називають *правильним*, якщо всі його грані – рівні правильні многокутники, а в кожній вершині многогранника сходиться одна й та сама кількість ребер.

Прикладом правильного многогранника є куб. Усі його грані – рівні квадрати, і в кожній з восьми вершин сходиться по три ребра.

Як вам відомо з попередніх класів, існує нескінченно багато видів правильних многокутників. Це випливає з того, що кількість сторін правильного многокутника може бути будь-яким натуральним числом, не меншим ніж 3. Проте видів правильних многогранників усього п’ять: *правильний тетраедр*, *куб*, *октаедр*, *додекаедр*, *ікосаедр* (мал. 4.1).



Правильний тетраедр *Куб* *Октаедр* *Додекаедр* *Ікосаедр*

Мал. 4.1

Число вершин, ребер, граней кожного з правильних многогранників подано в таблиці, яка систематизує *властивості правильних многогранників*.

№	Назва правильного многогранника	Число сторін у кожній грані	Число ребер у кожній вершині	Число граней	Число вершин	Число ребер	Сума плоских кутів при вершині
1	Правильний тетраедр	3	3	4	4	6	180°
2	Куб	4	3	6	8	12	270°
3	Октаедр	3	4	8	6	12	240°
4	Додекаедр	5	3	12	20	30	324°
5	Ікосаедр	3	5	20	12	30	300°

Також до властивостей правильних многогранників можна віднести таку:

усі двогранні кути кожного з правильних многогранників, які утворені двома гранями зі спільним ребром, рівні.

У природі, техніці, практичній діяльності людини трапляються об'єкти, що мають форму правильних многогранників. Форму куба мають кристали кухонної солі, деякі алмази, дитячі іграшки. Інші алмази кристалізуються у формі октаедрів, а кристали залізного колчедану мають форму додекаедра.

2. Розв'язування задач із правильними многогранниками

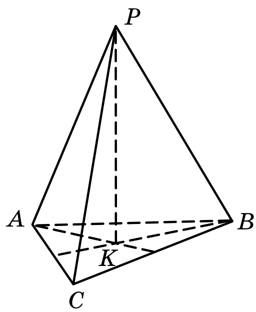
Задача 1. Знайти висоти правильного тетраедра, ребро якого дорівнює a.

Розв'язання. 1) Оскільки правильний тетраедр є видом правильної трикутної піраміди, то основою висоти є центр основи. На малюнку 4.2 зображено правильний тетраедр $PABC$ з ребром a.

2) KB – радіус кола, описаного навколо правильного трикутника зі стороною a, $KB = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

3) У $\triangle PKB$ ($\angle K = 90°$): $PK = \sqrt{PB^2 - BK^2} =$

$$= \sqrt{a^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{3}} = a\sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{a\sqrt{6}}{3}.$$



Мал. 4.2

4) Аналогічно можна обчислити інші висоти правильного тетраедра, які також будуть дорівнювати $\frac{a\sqrt{6}}{3}$.

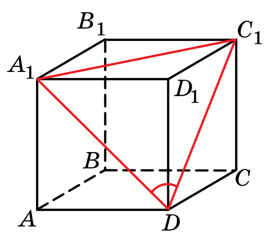
Відповідь. $\frac{a\sqrt{6}}{3}$.

Задача 2. Знайти кут між діагоналями двох граней куба, що мають спільну точку.

Розв'язання. 1) Нехай $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб (мал. 4.3). Знайдемо кут, наприклад, між діагоналями DA_1 і DC_1.

2) Сполучимо точки A_1 і C_1. Усі сторони трикутника A_1C_1D є діагоналями рівних квадратів, тому $A_1D = A_1C_1 = C_1D$.

3) Отже, $\triangle A_1C_1D$ – рівносторонній, тому $\angle A_1DC_1 = 60°$.



Мал. 4.3

Відповідь. $60°$.

Задача 3. Знайти площу повної поверхні ікосаедра, ребро якого дорівнює a.

Розв'язання. 1) Усі грані ікосаедра – рівні рівносторонні трикутники. Оскільки сторона цього трикутника дорівнює a, то його площа дорівнює $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

2) Усіх граней в ікосаедра 20. Тому площа повної поверхні

$$S_{\text{повн}} = 20 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = 5\sqrt{3}a^2.$$

Відповідь. $5\sqrt{3}a^2$.

А ще раніше...

Вчення про правильні многогранники міститься в останній, XIII, книжці Евкліда «Начала». Спочатку Евклід установлює існування цих многогранників і показує, як їх можна вписати у сферу. А потім доводить, що, крім п'яти правильних многогранників, про які йде мова в цьому параграфі підручника, інших не існує.

Деякі відомості про многогранники мали ще давні жителі Єгипту. Давньогрецький математик Прокл (V ст.) побудову п'яти правильних многогранників приписує Піфагору. Однак, як було встановлено пізніше, Піфагор міг знати тільки гексаедр (куб), тетраедр і додекаедр, оскільки октаедр і ікосаедр було, імовірно, відкрито лиш Теететом Афінським у IV ст. до н. е.

- Який многогранник називають правильним? • Які види правильних многогранників ви знаєте? • Опишіть, користуючись таблицею, властивості правильних многогранників.

Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

1

4.1. Знайдіть площу повної поверхні октаедра, якщо площа однієї грані дорівнює 2 дм^2.

4.2. Знайдіть площу повної поверхні куба, якщо площа однієї грані дорівнює 9 см^2.

2

4.3. Знайдіть площу повної поверхні куба, якщо його ребро дорівнює 2 см.

4.4. Знайдіть площу повної поверхні правильного тетраедра, ребро якого дорівнює 4 см.

4.5. Знайдіть діагональ куба, ребро якого дорівнює 1 дм.

4.6. Знайдіть площу грані куба, якщо діагональ цієї грані дорівнює 6 см.

4.7. Площа повної поверхні октаедра дорівнює $8\sqrt{3}$ см^2. Знайдіть довжину ребра октаедра.

4.8. Площа повної поверхні ікосаедра дорівнює $80\sqrt{3}$ см^2. Знайдіть довжину ребра ікосаедра.

3

4.9. Ребро куба дорівнює 8 см. Площа повної поверхні додекаедра дорівнює площі повної поверхні куба. Знайдіть площу однієї грані додекаедра.

4.10. Площа однієї грані додекаедра дорівнює 8 дм^2. Площа повної поверхні додекаедра дорівнює площі повної поверхні куба. Знайдіть довжину ребра куба.

4.11. Знайдіть суму всіх плоских кутів при всіх вершинах ікосаедра.

4.12. Знайдіть суму всіх плоских кутів при всіх вершинах октаедра.

4.13. $PABC$ – правильний тетраедр, точка O – центр грані ABC, точки A_1, B_1, C_1 – середини ребер PA, PB і PC відповідно. Доведіть, що $PA_1B_1C_1$ також правильний тетраедр.

4.14. У кубі $ABCDA_1B_1C_1D_1$ центр верхньої основи точка P сполучена з вершинами A, B, C і D. Доведіть, що $PABCD$ – правильна піраміда.

4.15. Ребро октаедра дорівнює a. Знайдіть відстань між протилежними вершинами октаедра.

4.16. Висота правильного тетраедра дорівнює 4. Знайдіть ребро правильного тетраедра.

4

4.17. Знайдіть двогранні кути правильного тетраедра.

4.18. Знайдіть кути, що утворюють бічні ребра правильного тетраедра із площиною основи.

4.19. 1) Доведіть, що центри граней октаедра є вершинами куба.
2) Знайдіть ребро куба, якщо ребро октаедра дорівнює a.

4.20. 1) Доведіть, що центри граней куба є вершинами октаедра.
2) Знайдіть ребро октаедра, якщо ребро куба дорівнює a.

4.21. (*Практична діяльність.*) Купіть два пакети соку однакового об'єму: один, що має форму прямокутного паралелепіпеда, інший – правильного тетраедра. Виконайте відповідні обчислення та встановіть, на який з пакетів для соку витратили менше матеріалу.

Життєва математика

4.22. Для якісного вирощування однієї рослини буряка потрібна площа, що має форму квадрата зі стороною 30 см. Скільки рослин буряка можна виростити на городі квадратної форми зі стороною 31,5 м?

4.23. Одного рулону шпалер вистачає для обклеювання смуги від підлоги до стелі завширшки 1,6 м. Скільки рулонів шпалер потрібно купити для обклеювання прямокутної кімнати розмірами 3,7 м × 4,6 м?

Підготуйтеся до вивчення нового матеріалу

4.24. Знайдіть довжину кола, радіус якого дорівнює:
1) 3 дм; 2) 5 см.

4.25. Знайдіть площу круга, радіус якого дорівнює:
1) 7 см; 2) 4 дм.

4.26. У колі, радіус якого дорівнює 13 см, проведено хорду завдовжки 24 см. Знайдіть відстань від центра кола до хорди.

Перевірте свою компетентність!

Завдання № 4

1. Діагональ прямокутника дорівнює 12 см. Знайдіть меншу сторону прямокутника, якщо діагоналі перетинаються під кутом 60°.

А	Б	В	Г	Д
4 см	6 см	$6\sqrt{3}$ см	9 см	визначити неможливо

2. У правильній чотирикутній призмі діагональ основи дорівнює $5\sqrt{2}$ см, а бічне ребро – 8 см. Знайдіть площу бічної поверхні призми.

А	Б	В	Г	Д
160 см^2	$40\sqrt{2}$ см^2	$160\sqrt{2}$ см^2	80 см^2	інша відповідь

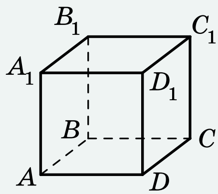
3. Який кут утворюють вектори $\vec{a}(-1;\ 2;\ 4)$ і $\vec{b}(8;\ 0;\ 2)$?

А	Б	В	Г	Д
0°	30°	45°	60°	90°

4. Сторона AB ромба $ABCD$ належить площині α, а сторона CD не належить площині α. Як розташована пряма CD відносно площини α?

А	Б	В	Г	Д
паралельна або перетинає	перпендикулярна	паралельна	перетинає або перпендикулярна	перетинає

5. На малюнку зображено прямокутний паралелепіпед $ABCDA_1B_1C_1D_1$, у якого сторони основи $AB = 3$, $AD = 4$, а висота $BB_1 = 12$. Установіть відповідність між геометричною величиною (1–4) та її числовим значенням (А–Д).



Геометрична величина		*Числове значення*	
1	діагональ паралелепіпеда	**А**	192
2	площа діагонального перерізу паралелепіпеда	**Б**	144
3	сума довжин усіх ребер паралелепіпеда	**В**	76
4	площа повної поверхні паралелепіпеда	**Г**	60
		Д	13

	А	**Б**	**В**	**Г**	**Д**
1					
2					
3					
4					

6. Основа рівнобедреного трикутника відноситься до його висоти, проведеної до основи, як 3 : 2, бічна сторона трикутника дорівнює 20 см. Знайдіть периметр трикутника (у см).

Домашня самостійна робота № 1

Кожне завдання має по чотири варіанти відповіді (А–Г), серед яких лише один є правильним. Оберіть правильний варіант відповіді.

1. У призмі площа бічної поверхні дорівнює 24 см^2, а площа повної поверхні – 36 см^2. Знайдіть площу основи.

А. 60 см^2 **Б.** 12 см^2 **В.** 6 см^2 **Г.** 4 см^2

2. Один з кутів чотирикутника, що є основою паралелепіпеда, дорівнює 100°. Якому значенню може дорівнювати інший кут цього чотирикутника?

А. 120° **Б.** 110° **В.** 90° **Г.** 80°

3. Площа бічної поверхні правильної шестикутної піраміди дорівнює 30 см^2. Знайдіть площу однієї бічної грані цієї піраміди.

А. 6 см^2 **Б.** 5 см^2 **В.** 180 см^2 **Г.** 3 см^2

2

4. Висота похилої призми дорівнює 6 см. Знайдіть бічне ребро призми, якщо воно утворює з площиною основи кут 45°.

А. $6\sqrt{2}$ см **Б.** 6 см **В.** 12 см **Г.** $6\sqrt{3}$ см

5. Сторони основи прямокутного паралелепіпеда дорівнюють 5 см і 12 см, а висота – 4 см. Знайдіть площу діагонального перерізу паралелепіпеда.

А. 20 см^2 **Б.** 48 см^2 **В.** 52 см^2 **Г.** 136 см^2

6. Апофема правильної чотирикутної піраміди дорівнює 5 см, а сторона основи – 8 см. Знайдіть площу повної поверхні піраміди.

А. 80 см^2 **Б.** 144 см^2
В. 224 см^2 **Г.** $(60 + 16\sqrt{3})$ см^2

3

7. У правильній трикутній призмі медіана основи дорівнює $2\sqrt{3}$ см. Знайдіть площу бічної поверхні цієї призми, якщо діагональ бічної грані утворює з висотою кут 45°.

А. 16 см^2 **Б.** 36 см^2 **В.** 96 см^2 **Г.** 48 см^2

8. Основою піраміди є рівнобедрений трикутник з основою 6 см і бічною стороною 5 см. Бічні грані піраміди, що містять бічні сторони рівнобедреного трикутника, перпендикулярні до основи, а третя нахилена до площини основи під кутом 60°. Знайдіть висоту піраміди.

А. $4\sqrt{3}$ см **Б.** 4 см **В.** $\dfrac{4}{\sqrt{3}}$ см **Г.** $3\sqrt{3}$ см

9. Знайдіть суму всіх плоских кутів при всіх вершинах правильного тетраедра.

А. 1080° **Б.** 180° **В.** 720° **Г.** 1800°

4

10. Знайдіть відношення площі найбільшого діагонального перерізу правильної шестикутної призми до площі його основи, якщо висота призми дорівнює стороні основи.

А. $2 : 3\sqrt{3}$ **Б.** $4 : 3\sqrt{3}$ **В.** $2 : \sqrt{3}$ **Г.** $2 : 1$

11. Основою прямого паралелепіпеда є ромб, площа якого дорівнює 24 см^2. Площі діагональних перерізів паралелепіпеда дорівнюють 30 см^2 і 40 см^2. Знайдіть висоту паралелепіпеда.

А. 4 см **Б.** 3 см **В.** 6 см **Г.** 5 см

12. Основою піраміди є прямокутний трикутник з катетами 3 см і 4 см. Усі бічні грані піраміди нахилені до площини основи під кутом 60°. Знайдіть площу повної поверхні піраміди.

А. 18 см^2 **Б.** 12 см^2 **В.** 24 см^2 **Г.** 20 см^2

Завдання для перевірки знань до §§ 1–4

1 **1.** У призмі площа бічної поверхні дорівнює 28 см^2, а площа основи – 12 см^2. Знайдіть площу повної поверхні призми.

2. Чи є паралелепіпедом чотирикутна призма, в основі якої лежить чотирикутник, кути якого відповідно дорівнюють:

1) 30°, 150°, 30°, 150°; 2) 20°, 160°, 30°, 150°?

3. Знайдіть площу бічної поверхні правильної п'ятикутної піраміди, якщо площа однієї бічної грані дорівнює 8 см^2.

2 **4.** Бічне ребро похилої призми дорівнює $8\sqrt{3}$ см і утворює з площиною основи кут 60°. Знайдіть висоту призми.

5. Сторони основи прямокутного паралелепіпеда дорівнюють 7 см і 24 см, а висота – 5 см. Знайдіть площу:

1) діагонального перерізу паралелепіпеда;
2) повної поверхні паралелепіпеда.

6. Апофема правильної трикутної піраміди дорівнює 5 см, а сторона основи – 6 см. Знайдіть площу повної поверхні піраміди.

3 **7.** У правильній чотирикутній призмі діагональ основи дорівнює $6\sqrt{2}$ см. Знайдіть площу бічної поверхні цієї призми, якщо діагональ призми утворює з бічним ребром кут 45°.

4 **8.** Основою прямого паралелепіпеда є паралелограм з тупим кутом 150° і площею 15 см^2. Площі бічних граней паралелепіпеда дорівнюють 20 см^2 і 24 см^2. Знайдіть висоту паралелепіпеда.

Додаткові завдання

3 **9.** Ребро куба дорівнює 4 см. Площа повної поверхні куба дорівнює площі повної поверхні октаедра. Знайдіть площу однієї грані октаедра.

4 **10.** Основою піраміди є ромб з діагоналями 12 см і 16 см. Усі бічні грані піраміди утворюють з площиною основи кути по 45°. Знайдіть площу повної поверхні піраміди.

РОЗДІЛ 2

ТІЛА ОБЕРТАННЯ

У ЦЬОМУ РОЗДІЛІ ВИ:

- ***згадаєте*** геометричні тіла: циліндр, конус, кулю;
- ***дізнаєтеся*** про тіла обертання, перерізи вищезгаданих тіл;
- ***навчитеся*** будувати зображення циліндра, конуса та кулі, їх елементів і найпростіших перерізів; обчислювати основні елементи циліндра, конуса та кулі.

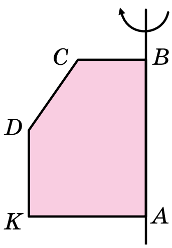
§ 5. ТІЛА ОБЕРТАННЯ. ЦИЛІНДР

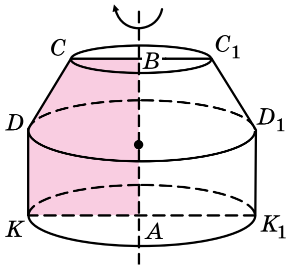
У кількох попередніх параграфах ви розглянули один з видів геометричних тіл – многогранник. Іншим видом геометричних тіл, які вивчають у шкільному курсі геометрії, є *тіло обертання: циліндр, конус, куля.*

Спочатку розглянемо загальне поняття тіл обертання.

1. Тіла обертання

Нехай деякий плоский опуклий многокутник $ABCDK$ обертається навколо нерухомої прямої, що містить сторону AB (мал. 5.1). Тоді кожна точка, що належить многокутнику, крім точок, що належать стороні AB, описує коло, центр якого належить прямій AB. При цьому весь многокутник $ABCDK$ описує *тіло обертання*, пряму AB називають *віссю* цього *тіла обертання*. Площина, що проходить через вісь тіла обертання, перетинає його по деякій фігурі. Цю фігуру називають *осьовим перерізом*. Осьовим перерізом тіла обертання, зображеного на малюнку 5.1, є многокутник $CDKK_1D_1C_1$.





Мал. 5.1

Поверхню, утворену обертанням ламаної $BCDKA$ навколо прямої AB, називають *поверхнею обертання*.

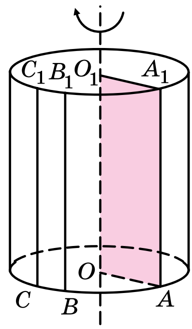
Якщо тіло обертання, що утворене обертанням многокутника $ABCDK$, перетнути площиною, перпендикулярною до прямої AB, то в перерізі отримаємо круг, центр якого належатиме прямій AB.

Так приходимо до означення тіла обертання (у найпростішому випадку), яким будемо користуватися у шкільному курсі геометрії.

! ***Тілом обертання*** **називають таке тіло, яке площинами, перпендикулярними до деякої прямої (осі обертання), перетинається по кругах із центрами на цій прямій.**

У загальному вигляді: *тілом обертання називають геометричне тіло, утворене обертанням деякої плоскої фігури навколо фіксованої прямої, яку називають віссю обертання.*

Мал. 5.2



Мал. 5.3

Прикладами тіл обертання, що трапляються в побуті, є бочка, діжка, дзиґа тощо (мал. 5.2).

2. Циліндр

***Циліндром* називають геометричне тіло, утворене обертанням прямокутника навколо осі, яка містить одну з його сторін (мал. 5.3).**

На малюнку 5.3 прямокутник OO_1A_1A обертається навколо прямої, що містить сторону OO_1 цього прямокутника, пряма OO_1 є *віссю циліндра*, утвореного в результаті цього обертання. Сторони прямокутника OA і O_1A_1 описують рівні між собою круги, що належать паралельним площинам. Ці круги називають *основами циліндра*, їх радіус – *радіусом циліндра*, діаметр – *діаметром циліндра*. На малюнку 5.3: OA і O_1A_1 – радіуси циліндра. Поверхню, утворену обертанням сторони AA_1 паралельно осі циліндра, називають *бічною поверхнею циліндра*. Кожний відрізок цієї поверхні (а також його довжину), що паралельний і дорівнює відрізку AA_1, називають *твірною циліндра*. На малюнку 5.3: AA_1, BB_1, CC_1 – твірні циліндра. Відстань між площинами основ, яка дорівнює довжині твірної циліндра, називають *висотою циліндра*.

Задача 1. Прямокутник, діагональ якого дорівнює 13 см, а одна зі сторін на 7 см менша за іншу, обертається навколо більшої сторони. Знайти радіус і висоту отриманого циліндра.

Розв'язання. 1) Нехай прямокутник AOO_1A_1 обертається навколо осі OO_1, $OO_1 > OA$ (мал. 5.3).

2) Нехай $OA = x$ (см), тоді $OO_1 = x + 7$ (см). За умовою $O_1A = 13$ см. Маємо $x^2 + (x + 7)^2 = 13^2$; $2x^2 + 14x - 120 = 0$; $x^2 + 7x - 60 = 0$; $x_1 = 5$ (см); $x_2 = -12$ – не підходить.

3) Отже, радіус циліндра $OA = 5$ см, а висота $AA_1 = OO_1 = 5 + 7 = 12$ (см).

Відповідь. Радіус – 5 см; висота – 12 см.

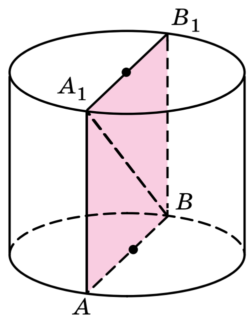
Зауважимо, що природно позначати радіус циліндра літерою r, а висоту – літерою h. Тоді відповідь до попередньої задачі можна записати так: $r = 5$ см; $h = 12$ см.

Форму циліндра мають багато предметів побуту та техніки: вали, ротор і статор двигуна, батареї конденсаторів, труби, башти, дзвіниці, колонади тощо.

3. Перерізи циліндра площинами

Переріз циліндра площиною, яка проходить через його вісь, називають *осьовим перерізом циліндра* (мал. 5.4). Осьовий переріз циліндра – прямокутник, одна зі сторін якого дорівнює діаметру циліндра, а інша – його висоті. На малюнку 5.4 прямокутник ABB_1A_1 – осьовий переріз циліндра, AB – діаметр циліндра, AA_1 – твірна, що дорівнює висоті циліндра. Якщо осьовим перерізом циліндра є квадрат, то його іноді називають *рівностороннім*.

Задача 2. Довжина кола основи циліндра дорівнює 15π см, а діагональ осьового перерізу – 17 см. Знайти твірну циліндра.



Мал. 5.4

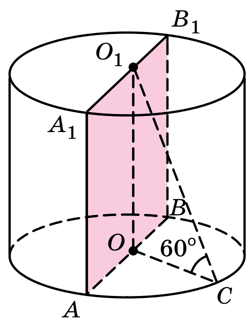
Розв'язання. 1) Нехай A_1B – діагональ осьового перерізу циліндра (мал. 5.4), $A_1B = 17$ см.

2) Позначимо радіус циліндра – r. Тоді за умовою $2\pi r = 15\pi$, звідки $2r = 15$ см, тому $AB = 2r = 15$ см.

3) У $\triangle AA_1B$ ($\angle A = 90°$): $AA_1 = \sqrt{A_1B^2 - AB^2} = \sqrt{17^2 - 15^2} = 8$ (см).

Відповідь. 8 см.

Задача 3. Відрізок, що сполучає центр верхньої основи циліндра з точкою кола нижньої основи, дорівнює 12 см і утворює з площиною нижньої основи кут 60°. Знайти площу осьового перерізу циліндра.



Мал. 5.5

Розв'язання. 1) Нехай O_1C – відрізок, що сполучає центр верхньої основи – точку O_1 – з точкою C кола нижньої основи (мал. 5.5), $O_1C = 12$ см (за умовою). OC – проекція O_1C на площину нижньої основи, тому $\angle O_1CO$ – кут, що утворює відрізок O_1C з площиною нижньої основи. За умовою $\angle O_1CO = 60°$.

2) У $\triangle OO_1C$ ($\angle O = 90°$):

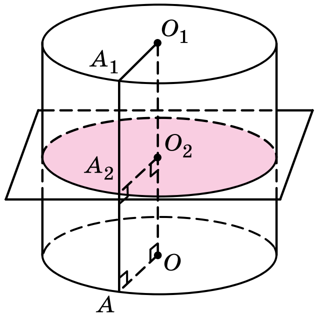
$$OO_1 = O_1C \cdot \sin\angle O_1CO = 12\sin 60° = 12 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3} \text{ (см)};$$

$$OC = O_1C \cdot \cos\angle O_1CO = 12\cos 60° = 12 \cdot \frac{1}{2} = 6 \text{ (см)}.$$

3) AA_1B_1B – осьовий переріз, $AA_1 = OO_1 = 6\sqrt{3}$ см, $AB = 2 \cdot AO = 2 \cdot OC = 2 \cdot 6 = 12$ (см).

4) Тоді площа діагонального перерізу $S = AB \cdot AA_1 = 12 \cdot 6\sqrt{3} = 72\sqrt{3}$ (см^2).

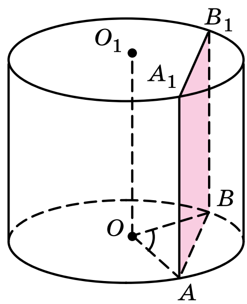
Відповідь. $72\sqrt{3}$ см^2.



Мал. 5.6

Перерізом циліндра площиною, яка паралельна площині основи, є круг, що дорівнює кругу основи циліндра (мал. 5.6). Дійсно, кожна точка A_2 твірної AA_1 знаходиться від осі OO_1 на відстані A_2O_2, що дорівнює радіусу AO, оскільки AOO_2A_2 – прямокутник.

Перерізом циліндра площиною, паралельною осі циліндра, є прямокутник. На малюнку 5.7 прямокутник AA_1B_1B – переріз циліндра площиною, паралельною осі циліндра OO_1. Дві його сторони: AA_1 і BB_1 – твірні циліндра, а дві інші: AB і A_1B_1 – паралельні та рівні хорди основ.



Мал. 5.7

Задача 4. Паралельно осі циліндра проведено площину, яка відтинає від кола основи дугу 60°. Радіус основи циліндра дорівнює 4 см, а висота – 3 см. Знайдіть периметр отриманого перерізу.

Розв'язання. 1) Нехай ABB_1A_1 – переріз, що задано в умові (мал. 5.7), $OA = OB = 4$ см, $AA_1 = 3$ см, $\angle AOB = 60°$.

2) Оскільки $OA = OB$, то $\triangle AOB$ – рівнобедрений. $\angle OAB = \angle OBA = \dfrac{180° - 60°}{2} = 60°$. Тому $\triangle AOB$ – рівносторонній, $AB = OA = 4$ см.

3) Отже, периметр перерізу $P = 2(AA_1 + AB) = 2(3 + 4) = 14$ (см).

Відповідь. 14 см.

А ще раніше...

Визначення тіла обертання траплялися ще в догрецьку епоху.

*У XI книжці «Начал» Евклід дає визначення циліндра, виходячи з обертання прямокутника навколо однієї з його сторін. Проте поняття **циліндричної поверхні** у нього відсутнє; останнє зустрічається в одного з його коментаторів – Серена з Антиної (Єгипет), який жив у IV ст.*

Про площу бічної поверхні циліндра в «Началах» Евкліда не йшла мова, її було знайдено Архімедом.

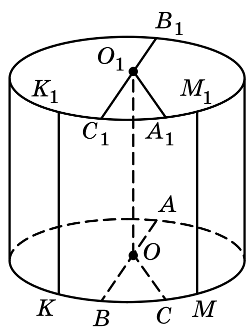
● Поясніть, що таке тіло обертання. ● Що називають віссю тіла обертання, осьовим перерізом тіла обертання? ● Поясніть, що таке поверхня обертання. ● Дайте означення тіла обертання. ● Яке тіло називають циліндром? ● Що називають віссю циліндра, основами циліндра, радіусом циліндра, діаметром циліндра? ● Що називають бічною поверхнею циліндра, твірними циліндра? ● Що називають висотою циліндра? ● Що називають осьовим перерізом циліндра? ● Що є перерізом циліндра площиною, яка паралельна площині основи? ● Що є перерізом циліндра площиною, паралельною осі циліндра?

Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

1 **5.1.** (*Усно.*) Наведіть приклади побутових предметів, що мають форму циліндра.

5.2. На малюнку 5.8 зображено циліндр, у якого O і O_1 – центри основ. Як називають відрізок:
1) KK_1; 2) O_1A_1; 3) AB?

5.3. На малюнку 5.8 зображено циліндр, у якого O і O_1 – центри основ. Як називають відрізок:
1) MM_1; 2) B_1C_1; 3) OC?



Мал. 5.8

5.4. На малюнку 5.8 зображено циліндр, у якого O і O_1 – центри основ, $KK_1 = 5$ см, $O_1A_1 = 6$ см. Знайдіть довжину відрізка:
1) MM_1; 2) OC; 3) AB.

5.5. На малюнку 5.8 зображено циліндр, у якого O і O_1 – центри основ, $AB = 8$ см, $MM_1 = 7$ см. Знайдіть довжину відрізка:
1) KK_1; 2) B_1C_1; 3) O_1A_1.

5.6. Прямокутник зі сторонами 5 см і 8 см обертається навколо більшої сторони. Знайдіть довжини радіуса, діаметра та висоти утвореного циліндра.

5.7. Прямокутник зі сторонами 4 см і 7 см обертається навколо меншої сторони. Знайдіть довжини висоти, радіуса і діаметра утвореного циліндра.

2 **5.8.** Діагональ осьового перерізу циліндра дорівнює 13 см, а його висота – 5 см. Знайдіть радіус циліндра.

5.9. Радіус основи циліндра дорівнює 4 см, а висота – 15 см. Знайдіть діагональ осьового перерізу циліндра.

5.10. Прямокутник, діагональ якого дорівнює 10 см і нахилена до площини основи під кутом 30°, є осьовим перерізом циліндра. Знайдіть:

1) висоту циліндра; 2) радіус основи циліндра;
3) довжину кола основи циліндра.

5.11. Прямокутник, діагональ якого дорівнює 12 см і нахилена до площини основи під кутом 60°, є осьовим перерізом циліндра. Знайдіть:

1) радіус основи циліндра; 2) висоту циліндра;
3) площу основи циліндра.

5.12. Площа основи циліндра дорівнює 144π см^2, а діагональ осьового перерізу – 25 см. Знайдіть:

1) довжину твірної циліндра;
2) площу осьового перерізу циліндра.

5.13. Довжина кола основи циліндра дорівнює 4π см, а довжина твірної – 3 см. Знайдіть:

1) діагональ осьового перерізу циліндра;
2) площу осьового перерізу циліндра.

5.14. Висота циліндра вдвічі більша за його радіус, а площа осьового перерізу циліндра дорівнює 36 см^2. Знайдіть радіус і висоту циліндра.

5.15. Площа осьового перерізу циліндра дорівнює 32 см^2. Знайдіть радіус і висоту циліндра, якщо вони рівні.

5.16. Відрізок, що сполучає центр верхньої основи з точкою кола нижньої основи, дорівнює $6\sqrt{2}$ см. Знайдіть радіус і висоту циліндра, якщо вони рівні між собою.

5.17. Висота циліндра втричі більша за його радіус, а відрізок, що сполучає центр верхньої основи з точкою кола нижньої основи, дорівнює $2\sqrt{10}$ см. Знайдіть радіус і висоту циліндра.

3 **5.18.** Діагональ осьового перерізу циліндра дорівнює 29 см, а радіус основи циліндра на 11 см менший за висоту. Знайдіть площу осьового перерізу циліндра.

5.19. Діагональ осьового перерізу циліндра на 13 см більша за радіус циліндра, а його висота дорівнює 15 см. Знайдіть площу осьового перерізу циліндра, якщо довжина його радіуса виражається цілим числом сантиметрів.

5.20. Діагональ перерізу циліндра, який паралельний його осі, дорівнює 10 см і утворює з площиною основи кут 30°. Переріз відтинає від кола основи дугу 120°. Знайдіть:
1) висоту циліндра; 2) площу перерізу циліндра;
3) радіус циліндра; 4) площу основи циліндра.

5.21. Діагональ перерізу циліндра, який паралельний його осі, дорівнює 12 см і утворює з площиною основи кут 60°. Переріз відтинає від кола основи дугу 60°. Знайдіть:
1) висоту циліндра; 2) площу перерізу циліндра;
3) радіус циліндра; 4) довжину кола основи.

5.22. Перерізом циліндра площиною, паралельною його осі, є квадрат, що відтинає від кола основи дугу 90°. Знайдіть відстань від осі циліндра до цього перерізу, якщо висота циліндра дорівнює 8 см.

5.23. Паралельно осі циліндра на відстані 3 см від неї проведено переріз, який відтинає від кола дугу 90°. Знайдіть площу отриманого перерізу, якщо висота циліндра дорівнює 5 см.

5.24. Відрізок, що сполучає центр верхньої основи циліндра з точкою кола нижньої основи, дорівнює l і утворює з віссю циліндра кут β. Знайдіть площу осьового перерізу циліндра.

5.25. Радіус основи циліндра дорівнює r. Відрізок, що сполучає центр верхньої основи з точкою кола нижньої основи, утворює з площиною основи кут α. Знайдіть площу осьового перерізу циліндра.

5.26. Діагональ осьового перерізу циліндра дорівнює 10 см. Паралельно осі циліндра проведено переріз, який є квадратом із площею 36 см^2. Знайдіть довжину кола основи циліндра.

5.27. Осьовий переріз циліндра – квадрат, діагональ якого дорівнює $5\sqrt{2}$ см. Паралельно осі циліндра проведено другий переріз, діагональ якого дорівнює 13 см. Знайдіть площу другого перерізу.

4 **5.28.** Через твірну циліндра проведено два перерізи, площі яких дорівнюють 6 см^2 і 16 см^2. Кут між площинами перерізів дорівнює 60°. Знайдіть площу перерізу циліндра, який проходить через дві інші твірні даних перерізів.

5.29. Через твірну циліндра проведено два перерізи, що утворюють між собою кут 120°. Площі цих перерізів дорівнюють 12 см^2 і 20 см^2. Знайдіть площу перерізу циліндра, який проходить через дві інші твірні даних перерізів.

5.30. Паралельно осі циліндра проведено площину, яка перетинає основу по хорді, що стягує дугу $90°$. Із центра іншої основи цю хорду видно під кутом $60°$. Площа утвореного перерізу дорівнює $4\sqrt{2}$ см^2. Знайдіть радіус основи циліндра.

5.31. Паралельно осі циліндра проведено площину, яка перетинає основу по хорді, що стягує дугу $120°$. Із центра іншої основи цю хорду видно під кутом $90°$. Знайдіть радіус основи циліндра, якщо його висота дорівнює $2\sqrt{2}$ см.

5.32. Паралельно осі циліндра проведено переріз, діагональ якого дорівнює d і утворює з площиною основи кут α. Переріз перетинає основу по хорді, яку видно із центра цієї основи під кутом β. Знайдіть відстань від осі циліндра до площини перерізу.

5.33. Паралельно осі циліндра проведено переріз, діагональ якого утворює з площиною основи кут γ. Переріз перетинає основу по хорді, яку видно із центра цієї основи під кутом α. Знайдіть діагональ перерізу, якщо відстань від осі циліндра до площини перерізу дорівнює m.

5.34. Висота циліндра дорівнює 15 см, а радіус основи – 5 см. Кінці відрізка завдовжки 17 см лежать на колах основ. Знайдіть відстань від середини відрізка до осі циліндра.

Життєва математика

5.35. Для того щоб визначити діаметр стовбура дерева, діти виміряли довжину кола стовбура дерева. Вона дорівнює 3,8 м. Який діаметр має стовбур? (Відповідь округлити до сотих метра.)

5.36. Щоб засіяти 1 м^2 землі, потрібно 40 г насіння газонної трави. Кілограм такого насіння коштує 80 грн. Скільки коштів знадобиться, щоб засіяти газонною травою клумбу, що має форму круга діаметром 30 м?

Перевірте свою компетентність!

Завдання № 5

1. Градусні міри двох кутів паралелограма відносяться як 2 : 7. Знайдіть різницю цих кутів паралелограма.

А	Б	В	Г	Д
$20°$	$40°$	$80°$	$100°$	$120°$

2. Скільки сторін має правильний многокутник, внутрішній кут якого на 120° більший за зовнішній?

А	Б	В	Г	Д
9	12	15	18	24

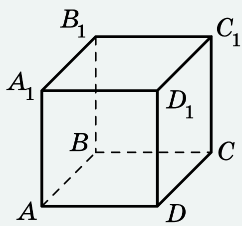
3. Основою прямої призми є прямокутний трикутник з катетами 5 см і 12 см. Висота призми дорівнює радіусу кола, вписаного в основу. Знайдіть площу бічної поверхні призми.

А	Б	В	Г	Д
60 см^2	120 см^2	195 см^2	240 см^2	30 см^2

4. Знайдіть модуль вектора $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$, якщо $\vec{a}(-2;\ 3;\ 4)$, $\vec{b}(0;\ 1;\ 5)$.

А	Б	В	Г	Д
1	2	3	4	визначити неможливо

5. На малюнку зображено куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Установіть відповідність між заданим кутом (1–4) та його градусною мірою (А–Д).



Кут

1 між прямими A_1B_1 і DD_1

2 між прямими A_1C_1 і C_1D

3 між прямою A_1D і площиною ABC

4 між площинами ABA_1 і CDD_1

Градусна міра

А 0°

Б 30°

В 45°

Г 60°

Д 90°

	А	Б	В	Г	Д
1					
2					
3					
4					

6. Два ребра трикутної піраміди, які не мають спільних точок, дорівнюють по 6 см, а всі інші ребра піраміди дорівнюють по 5 см. Знайдіть площу повної поверхні піраміди (у см^2).

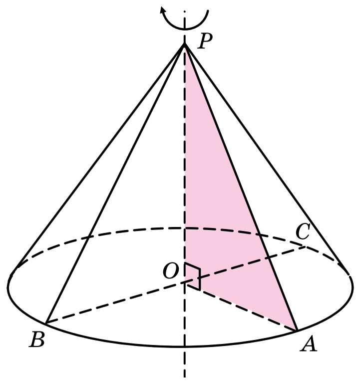
§ 6. КОНУС

Розглянемо в цьому параграфі ще одне тіло обертання – конус.

1. Конус

Конусом називають геометричне тіло, утворене обертанням прямокутного трикутника навколо осі, що містить один з його катетів (мал. 6.1).

На малюнку 6.1 прямокутний трикутник POA з прямим кутом O обертається навколо прямої, що містить катет PO цього трикутника, пряма PO є *віссю конуса*, утвореного в результаті цього обертання. Точку P називають *вершиною конуса*, катет PO (та його довжину) називають *висотою конуса*.



Мал. 6.1

Інший катет OA цього трикутника описує круг, який називають *основою конуса*. Радіус цього круга називають *радіусом основи конуса*, діаметр – *діаметром основи конуса*. На малюнку 6.1: OA, OB, OC – радіуси основи конуса, BC – її діаметр.

Поверхню, утворену обертанням гіпотенузи PA трикутника POA, називають *бічною поверхнею конуса*. Кожний відрізок цієї поверхні (а також його довжину), що сполучає вершину конуса – точку P – з точкою кола основи, називають *твірною конуса*. На малюнку 6.1: PA і PB – твірні конуса. Усі твірні конуса рівні між собою і нахилені до площини основи під одним і тим самим кутом. Зауважимо, що прийнято позначати радіус літерою r, висоту – h, твірну – l.

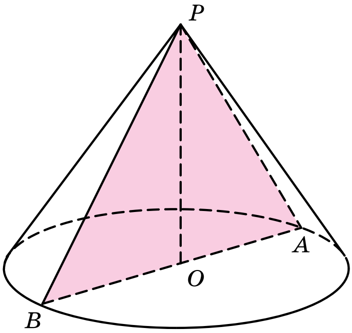
Задача 1. Прямокутний трикутник, гіпотенуза якого дорівнює 17 см, а катет – 8 см, обертається навколо цього катета. Знайти площу основи утвореного конуса.

Розв'язання. 1) $PA = l = 17$ см, $PO = h = 8$ см (мал. 6.1).
У $\triangle POA$ ($\angle O = 90°$): $OA = r = \sqrt{l^2 - h^2} = \sqrt{17^2 - 8^2} = 15$ (см).
2) Тоді площа основи $S = \pi r^2 = \pi \cdot 15^2 = 225\pi$ (см²).
Відповідь. 225π см².

Форму конуса мають багато предметів побуту і техніки: деталі механізмів і машин; конічної форми бувають колони та дахи; форму конуса мають різні лійки, відра, намети. Предмети конічної форми досить зручні для пакування під час транспортування, оскільки вони вільно входять одна в одну.

2. Перерізи конуса площинами

Переріз конуса площиною, яка проходить через його вісь, називають *осьовим перерізом конуса* (мал. 6.2). Осьовий переріз конуса – рівнобедрений трикутник, основа якого – діаметр конуса, а бічні сторони – твірні конуса. Висота цього рівнобедреного трикутника збігається з висотою конуса. На малюнку 6.2: трикутник PBA – осьовий переріз конуса, AB – діаметр конуса, PA і PB – твірні конуса, OP – висота конуса. Якщо осьовим перерізом конуса є рівносторонній трикутник, то його іноді називають *рівностороннім*.



Мал. 6.2

Задача 2. Довжина кола основи конуса дорівнює 8π см. Знайти площу осьового перерізу конуса, якщо він є прямокутним трикутником.

Розв'язання. 1) Нехай PAB – осьовий переріз конуса, $\angle BPA = 90^\circ$ (мал. 6.2).

2) Позначимо $OB = OA = r$. За умовою $2\pi r = 8\pi$, тоді $r = 4$ см.

3) $\triangle PBA$ – рівнобедрений прямокутний:

$$\angle PBO = \frac{180^\circ - 90^\circ}{2} = 45^\circ.$$

4) У $\triangle POB$ ($\angle O = 90^\circ$): $\angle BPO = 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ$, тому $PO = BO = 4$ см.

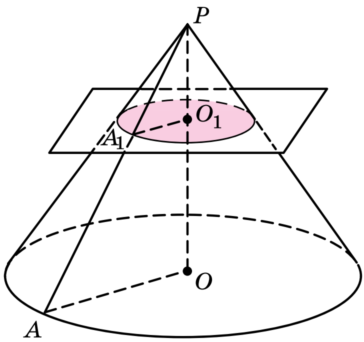
5) $S_{\triangle PBA} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot PO = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 4 = 16$ (см^2).

Відповідь. 16 см^2.

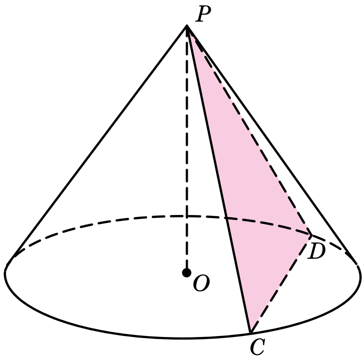
Перерізом конуса площиною, паралельною площині основи, є круг (мал. 6.3). Центр цього круга – точка O_1 – знаходиться на осі конуса.

Задача 3. Висота конуса дорівнює 12 см, а радіус основи – 15 см. На відстані 4 см від вершини конуса проведено переріз площиною, паралельною основі конуса. Знайти радіус цього перерізу.

Розв'язання. 1) За умовою задачі: $OA = 15$ см, $PO = 12$ см, $PO_1 = 4$ см (мал. 6.3).



Мал. 6.3



Мал. 6.4

2) $\triangle PA_1O_1 \sim \triangle PAO$ (за двома кутами), тоді:

$$\frac{PO_1}{PO} = \frac{A_1O_1}{AO};\ \frac{4}{12} = \frac{A_1O_1}{15};\ A_1O_1 = 5 \text{ см}.$$

Відповідь. 5 см.

Перерізом конуса площиною, яка проходить через вершину конуса, є рівнобедрений трикутник, бічні сторони якого є твірними конуса. На малюнку 6.4 трикутник PDC – переріз конуса площиною, що проходить через вершину конуса P. Його бічні сторони – твірні PD і PC конуса, а основа – хорда основи конуса DC.

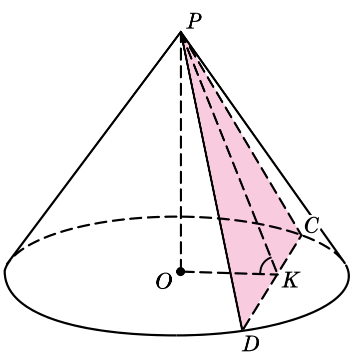
Задача 4. Через вершину конуса проведено переріз, який нахилений до площини основи під кутом $60°$. Знайти висоту конуса, якщо відстань від центра основи до хорди, по якій переріз перетинає основу, дорівнює $5\sqrt{3}$ см.

Розв'язання. 1) Нехай PCD – заданий переріз (мал. 6.5).

2) $\triangle PCD$ – рівнобедрений, CD – його основа, проведемо PK – висоту і медіану $\triangle PCD$.

3) Оскільки $PK \perp CD$ і OK – проекція PK на площину основи, то за теоремою про три перпендикуляри матимемо $OK \perp CD$.

4) Тоді OK – відстань від точки O до хорди CD, $OK = 5\sqrt{3}$ см (за умовою).



Мал. 6.5

5) Оскільки $PK \perp CD$ і $OK \perp CD$, то площина OPK перпендикулярна до хорди CD, тому $\angle PKO$ – кут нахилу перерізу PCD до площини основи. За умовою: $\angle PKO = 60°$.

6) У $\triangle PKO$ ($\angle O = 90°$):

$\operatorname{tg}\angle PKO = \dfrac{PO}{OK}$; $PO = 5\sqrt{3} \cdot \operatorname{tg}60° = 5\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = 15$ (см).

Відповідь. 15 см.

А ще раніше... *За визначенням Евкліда конус утворюється обертанням прямокутного трикутника навколо одного з катетів. У Евкліда відсутнє визначення* ***конічної поверхні;*** *воно було введено Аполлонієм у його «Конічних перерізах».*

У «Началах» Евкліда можна знайти лише визначення об'ємів циліндра і конуса, площу поверхні конуса (як і циліндра) було винайдено Архімедом.

● Яке тіло називають конусом? ● Що називають віссю конуса, вершиною конуса, висотою конуса? ● Що називають основою конуса, радіусом конуса, діаметром конуса? ● Що називають бічною поверхнею конуса? ● Що називають твірними конуса? ● Що називають осьовим перерізом конуса? ● Що є перерізом конуса площиною, яка паралельна площині основи конуса? ● Що є перерізом конуса площиною, яка проходить через вершину конуса?

Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

1

6.1. Накресліть конус, висота якого PK, а твірна PM.

6.2. Накресліть конус, висота якого SK, а радіус основи KL.

6.3. Радіус основи конуса дорівнює 8 см, а твірна – 10 см. Знайдіть висоту конуса.

6.4. Висота конуса дорівнює 24 см, а твірна – 25 см. Знайдіть радіус основи конуса.

6.5. Твірна конуса дорівнює 6 см і утворює з площиною основи кут 30°. Знайдіть радіус основи та висоту конуса.

6.6. Радіус основи конуса дорівнює 2 см. Твірна конуса утворює з площиною основи кут 45°. Знайдіть твірну та висоту конуса.

2

6.7. Висота конуса дорівнює 8 см, а твірна утворює з висотою кут 60°. Знайдіть площу осьового перерізу конуса.

6.8. Твірна конуса дорівнює 6 см і утворює з висотою кут 30°. Знайдіть площу осьового перерізу конуса.

6.9. Твірна конуса вдвічі довша за висоту. Який кут утворює твірна конуса з площиною основи?

6.10. Радіус основи конуса дорівнює його висоті. Який кут утворює твірна конуса з його висотою?

6.11. Осьовий переріз конуса – прямокутний трикутник з гіпотенузою 10 см. Знайдіть:
1) радіус основи конуса;
2) твірну конуса;
3) висоту конуса;
4) площу осьового перерізу конуса.

6.12. Осьовий переріз конуса – правильний трикутник зі стороною 6 см. Знайдіть:
1) радіус основи конуса;
2) твірну конуса;
3) висоту конуса;
4) площу осьового перерізу конуса.

6.13. Радіус основи конуса дорівнює 6 см. Через середину висоти проведено переріз, перпендикулярний до його висоти. Знайдіть площу цього перерізу.

6.14. Через середину висоти конуса проведено переріз, паралельний його основі. Радіус утвореного в перерізі круга дорівнює 4 см. Знайдіть площу основи конуса.

6.15. У результаті перерізу конуса площиною, паралельною його основі, отримали фігуру площею 4π см^2. У якому відношенні переріз ділить висоту конуса, якщо його радіус дорівнює 4 см?

3 **6.16.** Висота конуса дорівнює 6 см, а різниця твірної та радіуса основи – 2 см. Знайдіть периметр осьового перерізу конуса.

6.17. Радіус основи конуса дорівнює 7 см, а його твірна на 1 см більша за висоту. Знайдіть периметр осьового перерізу конуса.

6.18. Прямокутний трикутник з катетами 3 см і 4 см обертається навколо катета. Знайдіть периметр осьового перерізу утвореного конуса. Скільки розв’язків має задача?

6.19. Висота конуса дорівнює 9 см, а радіус основи – 3 см. Площина, перпендикулярна до осі конуса, перетинає його бічну поверхню по колу, довжина якого 4π см. Знайдіть відстань від вершини конуса до площини перерізу.

6.20. Радіус основи конуса дорівнює 6 см, а висота – 18 см. Площина, паралельна основі конуса, перетинає його по кругу, площа якого 16π см^2. Знайдіть відстань від вершини конуса до площини перерізу.

6.21. Радіус основи конуса дорівнює 2 см, а його висота – $\sqrt{6}$ см. Через дві твірні конуса проведено переріз, який перетинає основу конуса по хорді, що стягує дугу $60°$. Знайдіть площу перерізу.

6.22. Хорда основи конуса дорівнює 3 см і стягує дугу 90°. Через цю хорду і вершину конуса проведено переріз. Знайдіть його площу, якщо висота конуса дорівнює 2 см.

6.23. Твірна конуса дорівнює $4\sqrt{3}$ см і нахилена до площини основи під кутом 30°. Через дві твірні конуса проведено площину під кутом 60° до площини основи. Знайдіть відстань від центра основи висоти конуса до хорди, по якій площина перерізу перетинає площину основи конуса.

6.24. Висота конуса дорівнює $3\sqrt{2}$ см і утворює з твірною кут 45°. Через дві твірні конуса, що утворюють кут 60°, проведено площину. Знайдіть відстань від центра основи конуса до хорди, по якій площина перерізу перетинає площину основи конуса.

4 **6.25.** Площа основи конуса дорівнює πS, а твірна конуса утворює з висотою кут β. Знайдіть площу осьового перерізу конуса.

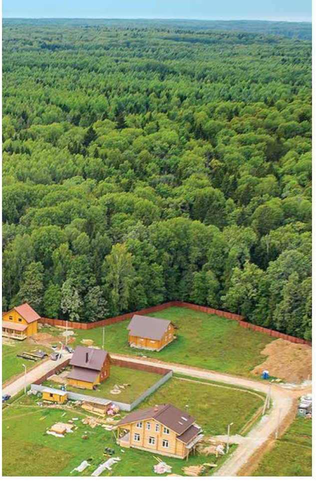
6.26. Твірна конуса утворює з площиною основи кут γ, а площа осьового перерізу конуса дорівнює Q. Знайдіть площу основи конуса.

6.27. Хорду, що проведено в основі конуса, видно із центра основи під кутом β, а з вершини конуса під кутом α. Знайдіть кут нахилу твірної конуса до площини основи.

6.28. В основі конуса проведено хорду завдовжки a, яку видно із центра основи під кутом β. Твірна конуса утворює з площиною основи кут γ. Знайдіть висоту конуса.

Життєва математика

6.29. Відомо, що над площею 1 км^2 зелених насаджень збирається пилу на 50 т менше, ніж над такою самою площею поля. На скільки менше пилу міститься над 4 га лісонасаджень, ніж над такою самою площею поля?



6.30. Кімната прямокутної форми має розміри 3,5 м × 4,8 м. У кімнаті є двері завширшки 80 см.

1) Скільки метрів плінтуса потрібно купити для цієї кімнати?

2) Скільки буде коштувати ця покупка, якщо один погонний метр плінтуса коштує 40 грн?

Перевірте свою компетентність!

Завдання № 6

1. Радіус кола, описаного навколо трикутника ABC, у 2 рази більший за радіус кола, вписаного в цей трикутник. Визначте вид трикутника ABC.

А	Б	В	Г	Д
тупокутний	прямокутний	прямокутний рівнобедрений	правильний	тупокутний рівнобедрений

2. Серед векторів $\vec{a}(1;\ -2)$, $\vec{b}(-2;\ -4)$, $\vec{c}(0;\ 1)$, $\vec{d}(1;\ 2)$ знайдіть пару колінеарних.

А	Б	В	Г	Д
$\vec{a}$ і $\vec{b}$	$\vec{a}$ і $\vec{c}$	$\vec{a}$ і $\vec{d}$	$\vec{b}$ і $\vec{c}$	$\vec{b}$ і $\vec{d}$

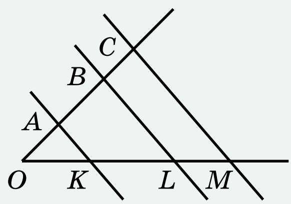
3. Радіус кола, вписаного в основу правильної трикутної призми, дорівнює $\sqrt{3}$ см, а висота призми – 5 см. Знайдіть площу бічної поверхні призми.

А	Б	В	Г	Д
30 см^2	45 см^2	60 см^2	90 см^2	120 см^2

4. Діаметр циліндра втричі більший за його висоту. Знайдіть радіус циліндра, якщо діагональ його осьового перерізу дорівнює $4\sqrt{10}$ см.

А	Б	В	Г	Д
4 см	9 см	6 см	12 см	інша відповідь

5. На малюнку прямі AK, BL і CM – паралельні, $OK = 6$ см, $KL = 7{,}5$ см, $AB = 5$ см, $BC = 3$ см. Установіть відповідність між відрізком (1–4) та його довжиною (А–Д).



Відрізок		*Довжина*	
1	OA	**А**	4 см
2	LM	**Б**	4,5 см
3	KM	**В**	6 см
4	OB	**Г**	9 см
		Д	12 см

	А	Б	В	Г	Д
1					
2					
3					
4					

6. З вершини A прямокутника $ABCD$ проведено перпендикуляр AS до його площини. Знайдіть (у см) довжину перпендикуляра AS, якщо $SB = 15$ см, $SC = 24$ см, $SD = 20$ см.

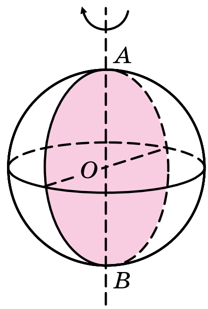
§ 7. КУЛЯ ТА СФЕРА

Розглянемо ще одне тіло обертання – кулю.

1. Куля та сфера

Кулею **називають геометричне тіло, утворене обертанням круга навколо осі, що містить його діаметр (мал. 7.1).**

Центр круга, який обертається, називають *центром кулі*, радіус круга – *радіусом кулі*, а діаметр круга – *діаметром кулі*. На малюнку 7.1: точка O – центр кулі, OA і OB – радіуси кулі, а AB – діаметр кулі.



Мал. 7.1

Поверхню кулі називають *сферою*.

Центр, радіус і діаметр кулі є також *центром*, *радіусом* і *діаметром сфери*.

Усі точки сфери знаходяться на одній і тій самій відстані, що дорівнює радіусу, від центра сфери. Інші точки кулі, які не належать сфері, називають *внутрішніми точками*, про такі точки кажуть, що вони лежать *всередині сфери*. Внутрішні точки кулі знаходяться від центра кулі на відстані, яка менша за радіус.

Таким чином, приходимо ще до одного означення сфери і кулі.

Сферою **називають поверхню, яка складається з усіх точок простору, рівновіддалених від однієї і тієї самої точки. Цю точку називають *центром сфери*, а відстань від центра сфери до будь-якої її точки – *радіусом сфери*.**

Кулею **називають геометричне тіло, що складається з усіх точок простору, які знаходяться від заданої точки на відстані, не більшій за дану відстань. Цю точку називають *центром кулі*, а дану відстань – *радіусом кулі*.**

Задача 1. Радіус сфери дорівнює 4,5 см. Всередині чи зовні сфери розташована точка A, якщо вона віддалена від центра сфери на: 1) $\sqrt{10}$ см; 2) 4 см; 3) $\sqrt{21}$ см; 4) 7 см?

Розв'язання. 1), 2) Оскільки $\sqrt{10} < 4{,}5$ і $4 < 4{,}5$, то точка A в кожному випадку розташована всередині сфери.

3), 4) Оскільки $\sqrt{21} > 4{,}5$ і $7 > 4{,}5$, то точка A розташована зовні сфери.

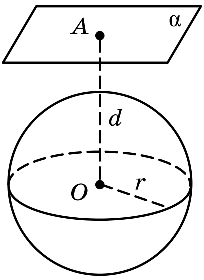
Відповідь. 1), 2) усередині сфери; 3), 4) зовні сфери.

Форму кулі мають багато предметів побуту і техніки: м'яч, цукерка, намистина, ялинкові іграшки, кульки підшипника тощо.

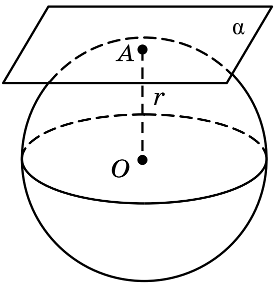
Розглянемо взаємне розміщення кулі та площини.

2. Взаємне розміщення кулі та площини

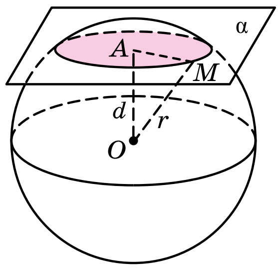
Площина α і куля можуть або не мати спільних точок (мал. 7.2), або мати одну спільну точку (мал. 7.3), або перетинатися і мати безліч спільних точок (мал. 7.4).



Мал. 7.2



Мал. 7.3



Мал. 7.4

Нехай $OM = r$ – радіус кулі, а $OA = d$ – перпендикуляр, проведений із центра кулі – точки O – до площини α (відстань від центра кулі до площини).

а) Якщо площина α і куля не мають спільних точок, то очевидно, що $d > r$.

б) Якщо площина α і куля мають одну спільну точку, то $d = r$.

в) Якщо площина α і куля мають безліч спільних точок, $d < r$.

Зауважимо, що обернене твердження також правильне: якщо $d > r$, то площина α і куля не мають спільних точок; якщо $d = r$, то площина α і куля мають одну спільну точку; якщо $d < r$, то площина α і куля мають безліч спільних точок.

Задача 2. Радіус кулі дорівнює 50 мм. Скільки спільних точок має куля з площиною, якщо відстань від центра кулі до площини дорівнює: 1) 4 см; 2) 5 см; 3) 6 см?

Відповідь. 1) Безліч; 2) одну; 3) жодної.

Розглянемо детальніше випадки, коли площина і куля мають одну або безліч спільних точок.

3. Площина, дотична до кулі (сфери)

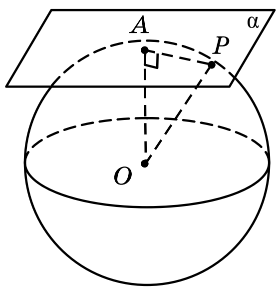
Якщо площина має з кулею (сферою) лише одну спільну точку, то кажуть, що площина *дотикається* до кулі (сфери).

На малюнку 7.3 площина α дотикається до кулі. Точку A, яка є спільною точкою площини і кулі, називають *точкою дотику*. Площина, дотична до кулі, має властивість, аналогічну властивості дотичної до кола.

Теорема (властивість площини, дотичної до кулі). **Дотична до кулі площина перпендикулярна до радіуса, проведеного в точку дотику.**

Доведення. Розглянемо площину α, що дотикається до кулі із центром O в точці A (мал. 7.3). Доведемо, що $OA \perp \alpha$. Припустимо супротивне. Тоді радіус OA є похилою до площини α, і тому відстань від точки O до площини α менша, ніж радіус кулі. Звідси випливає, що куля і площина α мають безліч спільних точок. Це приводить до протиріччя, оскільки за умовою площина α – дотична до кулі. Наше припущення неправильне. Тому $OA \perp \alpha$. ■

Задача 3. До кулі, радіус якої 4 см, проведено дотичну площину. На цій площині взято точку P, яка знаходиться на відстані 3 см від точки дотику кулі та площини. Знайти відстань від точки P до центра кулі.



Мал. 7.5

Розв'язання. 1) Нехай куля із центром у точці O дотикається до площини α у точці A, $OA = 4$ см (мал. 7.5).
2) P – довільна точка площини, така що $AP = 3$ см. Знайдемо OP.
3) Оскільки $OA \perp \alpha$, то $\angle OAP = 90°$.
Маємо $OP = \sqrt{AO^2 + AP^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} =$
$= 5$ (см).

Відповідь. 5 см.

4. Переріз кулі площиною

Якщо площина і куля мають безліч спільних точок (мал. 7.4), то кажуть про *переріз кулі площиною*.
Якщо площина проходить через діаметр кулі, то її називають *діаметральною площиною* (див. мал. 7.1). Перерізом кулі діаметральною площиною є круг,

радіус якого дорівнює радіусу кулі. Такий переріз називають *великим кругом*, а коло, що його обмежує, – *великим колом*.

Переріз кулі площиною, відмінною від діаметральної площини, є також круг, радіус якого менший, ніж радіус кулі. На малюнку 7.4 перерізом кулі площиною α є круг, центр якого – точка A – основа перпендикуляра, проведеного із центра кулі O до площини α. Радіус цього круга AM, де M – точка, що належить перерізу площини α зі сферою, що обмежує кулю. При цьому $OM = r$ – радіус кулі.

Задача 4. Діаметр кулі дорівнює 34 см. Кулю перетнуто площиною на відстані 8 см від центра. Знайти площу утвореного перерізу.

Розв'язання. 1) Радіус кулі $r = 34 : 2 = 17$ (см).

2) За малюнком 7.4: $AM = \sqrt{OM^2 - AO^2} = \sqrt{17^2 - 8^2} = 15$ (см), AM – радіус перерізу.

3) Площа перерізу $S = \pi \cdot AM^2 = \pi \cdot 15^2 = 225\pi$ (см^2).

Відповідь. 225π см^2.

А ще раніше...

У «Началах» (XII книжка) Евклід кулі та її поверхні приділяє порівняно мало уваги. У своїй праці він увів означення кулі, а про площу поверхні кулі та про її об'єм нічого не згадує. Це наводить на думку, що він їх скоріше за все не знав. Першим відкрив відповідні формули Архімед. Він у своєму трактаті «Про кулю і циліндр» наводить чіткі докази цих формул.

• Яке тіло називають кулею? • Що називають центром кулі, радіусом кулі, діаметром кулі? • Що називають сферою? • Що називають центром, радіусом, діаметром сфери? • Яким може бути взаємне розміщення кулі та площини? • Яку площину називають дотичною до кулі (сфери)? • Сформулюйте й доведіть теорему про властивість площини, дотичної до кулі. • У якому випадку кажуть про переріз кулі площиною? • Яку площину називають діаметральною? • Який переріз називають великим кругом?

Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

1

7.1. Знайдіть діаметр кулі, радіус якої дорівнює:
1) 3 дм; 2) 7,5 см.

7.2. Обчисліть діаметр кулі, радіус якої дорівнює:
1) 4 см; 2) 1,5 дм.

7.3. Обчисліть радіус кулі, діаметр якої дорівнює:
1) 8 см; 2) 1,2 дм.

7.4. Знайдіть радіус кулі, діаметр якої дорівнює:
1) 2 дм; 2) 5,6 см.

7.5. Радіус сфери дорівнює 6 см. Чи може відстань між двома деякими точками, що належать сфері, дорівнювати:
1) 6,1 см; 2) 9 см; 3) 12 см; 4) 13 см?

7.6. Діаметр сфери дорівнює 10 см. Чи може відстань між двома деякими точками, що належать сфері, дорівнювати:
1) 0,1 см; 2) 10 см; 3) 10,2 см; 4) 20 см?

7.7. Радіус кулі дорівнює 7,5 см. Усередині, зовні кулі чи на сферичній поверхні, що обмежує кулю, знаходиться точка, віддалена від центра кулі на відстань:
1) 7 см; 2) 7,4 см; 3) $7\frac{1}{2}$ см; 4) 8 см?

7.8. Радіус кулі дорівнює 4,2 см. Усередині, зовні кулі чи на сферичній поверхні, що обмежує кулю, знаходиться точка, віддалена від центра кулі на відстань:
1) 4 см; 2) $4\frac{1}{5}$ см; 3) 4,5 см; 4) 5 см?

7.9. Радіус кулі дорівнює 5 см. Знайдіть площу великого круга кулі.

7.10. Радіус кулі дорівнює 2 дм. Знайдіть довжину великого кола цієї кулі.

2

7.11. Діаметр кулі дорівнює 16 см. Точка A належить площині, дотичній до кулі, і знаходиться на відстані 15 см від точки дотику кулі та площини. Знайдіть відстань від точки A до центра кулі.

7.12. Точка B належить площині, дотичній до сфери, і знаходиться на відстані 12 см від точки дотику сфери і площини. Знайдіть діаметр сфери, якщо відстань від точки B до центра сфери дорівнює 13 см.

7.13. Кулю, радіус якої 25 см, перетнуто площиною на відстані 24 см від центра кулі. Знайдіть довжину кола, по якому площина перетинає поверхню кулі.

7.14. Кулю радіуса 10 см перетнуто площиною на відстані 6 см від центра кулі. Знайдіть площу утвореного перерізу.

7.15. A і B – точки сфери, причому AB не є діаметром сфери, N – середина відрізка AB, O – центр сфери. Доведіть, що $ON \perp AB$.

7.16. AB – діаметр сфери, M – довільна точка сфери. Доведіть, що $\angle AMB = 90°$.

7.17. Площина перетинає сферу. Діаметр сфери, проведений в одну з точок лінії перетину сфери і площини, дорівнює $4\sqrt{2}$ см і утворює з площиною кут 45°. Знайдіть відстань від центра сфери до площини перерізу.

7.18. Площина перетинає сферу. Діаметр сфери, проведений в одну з точок лінії перетину сфери і площини, дорівнює $6\sqrt{3}$ см і утворює з площиною кут 60°. Знайдіть відстань від центра сфери до площини перерізу.

7.19. Радіус кулі дорівнює 4 см. Точка A належить сфері, що обмежує кулю. Де може знаходитися точка B (усередині, зовні кулі чи на сферичній поверхні), якщо:

1) $AB = 2$ см; 2) $AB = 4$ см; 3) $AB = 8$ см; 4) $AB = 10$ см?

Розгляньте всі можливі випадки.

7.20. Радіус кулі дорівнює 2 см. Точка P належить сфері, що обмежує кулю. Де може знаходитися точка M (усередині, зовні кулі чи на сферичній поверхні), якщо:

1) $PM = 1$ см; 2) $PM = 2$ см;
3) $PM = 4$ см; 4) $PM = 9$ см?

Розгляньте всі можливі випадки.

3

7.21. Нехай C і D – дві деякі точки сфери. Скільки великих кіл можна провести через ці точки? Розгляньте всі випадки.

7.22. Площина α дотикається до сфери із центром O в точці A. Точка B належить площині α, OB перетинає сферу в точці K. Знайдіть довжину відрізка BK, якщо довжина великого кола цієї сфери дорівнює 16π см, а $AB = 6$ см.

7.23. Площина β дотикається до кулі із центром O в точці M. Точка K належить площині β, OK перетинає сферу, що обмежує кулю, у точці N. Знайдіть довжину відрізка MK, якщо $NK = 8$ см, а площа великого круга кулі дорівнює 25π см^2.

7.24. Через точку сфери радіуса $8\sqrt{2}$ см проведено площину під кутом 45° до радіуса сфери з кінцем у даній точці. Знайдіть довжину кола отриманого перерізу.

7.25. Радіус кулі дорівнює 12 см. Через кінець радіуса під кутом 60° до нього проведено площину. Знайдіть площу отриманого перерізу.

7.26. Вершини трикутника зі сторонами 6 см, 8 см і 10 см лежать на поверхні кулі, радіус якої 13 см. Знайдіть відстань від центра кулі до площини трикутника.

7.27. Вершини рівностороннього трикутника зі стороною 6 см лежать на поверхні кулі, радіус якої 4 см. Знайдіть відстань від центра кулі до площини трикутника.

7.28. Куля дотикається до всіх сторін рівностороннього трикутника зі стороною 12 см. Знайдіть радіус кулі, якщо площина трикутника знаходиться на відстані 2 см від центра кулі.

7.29. Куля дотикається до всіх сторін квадрата зі стороною 16 см. Знайдіть радіус кулі, якщо площина квадрата знаходиться на відстані 6 см від центра кулі.

7.30. На відстані $5\sqrt{3}$ см від центра кулі проведено переріз кулі, площа якого в 4 рази менша, ніж площа великого круга. Знайдіть радіус кулі.

7.31. На відстані $2\sqrt{15}$ см від центра сфери проведено переріз, довжина кола якого в 4 рази менша, ніж довжина великого кола сфери. Знайдіть радіус сфери.

4 **7.32.** Площа великого круга кулі дорівнює S, а площа перерізу кулі площиною – $\frac{16}{25}S$. На якій відстані від центра кулі проведено переріз?

7.33. Площа великого круга кулі дорівнює πQ, а площа перерізу кулі площиною – $\frac{9}{25}\pi Q$. На якій відстані від центра кулі проведено переріз?

7.34. Куля, радіус якої 37 см, дотикається до всіх сторін рівнобічної трапеції з основами 36 см і 16 см. Знайдіть відстань від центра кулі до площини трапеції.

7.35. Куля радіуса 10 см дотикається до всіх сторін ромба, діагоналі якого дорівнюють 15 см і 20 см. Знайдіть відстань від центра кулі до площини ромба.

7.36. Діаметр кулі двома точками поділено на три частини у відношенні 1 : 12 : 13. Знайдіть відношення площ перерізів кулі, які проходять через ці точки перпендикулярно до заданого діаметра.

7.37. Радіус кулі поділено точкою A на дві частини у відношенні 3 : 2, рахуючи від центра. Через точку A проведено переріз перпендикулярно до заданого радіуса. Знайдіть відношення площі цього перерізу до площі великого круга кулі.

Життєва математика

7.38. Згідно із санітарними нормами відношення площі вікон до площі підлоги у класній кімнаті повинно бути не менше ніж 0,2. Чи виконується ця норма у класній кімнаті, довжина якої 12 м, а ширина становить 45 % довжини, якщо в кімнаті три вікна розміром 2 м × 1,75 м?

7.39. Родина Нечепоруків планує на дачі пофарбувати із зовнішньої та внутрішньої сторін бак із кришкою для води. Бак має форму прямої призми заввишки 1,5 м, в основі якої лежить прямокутний трикутник з катетами 0,6 м і 0,8 м. У магазині є фарба в банках по 1 кг і 2,5 кг.

1) Скільки квадратних метрів треба пофарбувати? (Товщиною матеріалу можна знехтувати.)

2) Скільки і яких банок фарби треба купити для фарбування бака, якщо на 1 м^2 витрачається 0,2 кг фарби?

Підготуйтеся до вивчення нового матеріалу

7.40. Знайдіть об'єм куба, ребро якого дорівнює:

1) 5 см; 2) 2 дм; 3) 1 м; 4) 6 см.

7.41. Знайдіть об'єм прямокутного паралелепіпеда, лінійні виміри якого дорівнюють:

1) 2 см, 4 см, 5 см; 2) 2 дм, 12 см, 15 см;
3) 9 см, 1 дм, 180 мм; 4) 45 мм, 4 см, 0,7 дм.

Перевірте свою компетентність!

Завдання № 7

1. Знайдіть довжину кола, радіус якого на 5 см менший, ніж діаметр.

А	Б	В	Г	Д
5π см	10π см	25π см	10 см	інша відповідь

2. Радіус конуса дорівнює 5 см, а його твірна на 1 см більша за висоту. Знайдіть площу осьового перерізу конуса.

А	Б	В	Г	Д
30 см^2	40 см^2	60 см^2	90 см^2	120 см^2

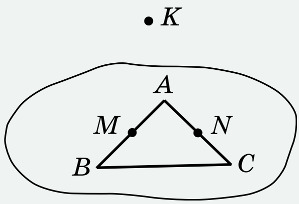
3. Усі ребра прямої трикутної призми дорівнюють 4 см. Знайдіть площу бічної поверхні призми.

А	Б	В	Г	Д
12 см^2	24 см^2	36 см^2	48 см^2	96 см^2

4. На осі аплікат знайдіть точку, рівновіддалену від точок A (0; 2; 3) і B (2; 4; 5).

А	Б	В	Г	Д
(0; 0; 8)	(0; 0; 4)	(0; 8; 0)	(8; 0; 0)	(0; 0; –8)

5. На малюнку зображено трикутник ABC та точки M і N, які є відповідно серединами сторін AB і AC цього трикутника. Точка K не належить площині трикутника ABC. Установіть відповідність між парою прямих (1–4) та взаємним розміщенням у просторі (А–Д).



Пара прямих		*Взаємне розміщення*	
1	KN і AB	**А**	перетинаються в точці K
2	MN і BC	**Б**	перетинаються в точці N
3	KM і KN	**В**	перетинаються в точці M
4	KN і AC	**Г**	мимобіжні
		Д	паралельні

	А	Б	В	Г	Д
1					
2					
3					
4					

6. Основа тупокутного рівнобедреного трикутника дорівнює 16 см, а радіус кола, описаного навколо цього трикутника, – 17 см. Знайдіть площу трикутника (у см^2).

Домашня самостійна робота № 2

Кожне завдання має по чотири варіанти відповіді (А–Г), серед яких лише один є правильним. Оберіть правильний варіант відповіді.

1 **1.** Прямокутник зі сторонами 4 см і 7 см обертається навколо більшої сторони. Знайдіть діаметр утвореного циліндра.

А. 4 см **Б.** 7 см **В.** 8 см **Г.** 14 см

2. Радіус основи конуса дорівнює 8 см, а його висота – 15 см. Знайдіть довжину твірної конуса.

А. 23 см **Б.** 17 см **В.** 16 см **Г.** $\sqrt{161}$ см

3. Радіус сфери дорівнює 8 см. Точки A і B – деякі точки, що належать сфері. Якою найбільшою може бути відстань між точками A і B?

А. 4 см **Б.** 8 см **В.** 16 см **Г.** 32 см

2 **4.** Площа основи циліндра дорівнює 36π см^2, а діагональ його осьового перерізу – 13 см. Знайдіть висоту циліндра.

А. 5 см **Б.** 6 см **В.** 4 см **Г.** $\sqrt{133}$ см

5. Осьовим перерізом конуса є прямокутний трикутник, гіпотенуза якого дорівнює 8 см. Знайдіть площу осьового перерізу конуса.

А. 8 см^2 **Б.** 32 см^2 **В.** 64 см^2 **Г.** 16 см^2

6. Сферу, радіус якої 25 см, перетнуто площиною на відстані 24 см від центра сфери. Знайдіть довжину кола, по якому перетинаються сфера і площина.

А. 7π см **Б.** 12π см **В.** 14π см **Г.** 16π см

3

7. Відрізок, що сполучає центр верхньої основи циліндра з точкою кола нижньої основи, дорівнює $4\sqrt{2}$ см і утворює з віссю циліндра кут 45°. Знайдіть площу осьового перерізу циліндра.

А. 16 см^2 **Б.** 32 см^2 **В.** $32\sqrt{2}$ см^2 **Г.** 64 см^2

8. Радіус основи конуса дорівнює 12 см, а висота – 18 см. Площина, перпендикулярна до осі конуса, перетинає його так, що площа утвореного перерізу дорівнює 16π см^2. Знайдіть відстань від вершини конуса до площини перерізу.

А. 4 см **Б.** 12 см **В.** 9 см **Г.** 6 см

9. Усі вершини прямокутного трикутника з катетами 3 см і 4 см лежать на поверхні кулі. Відстань від центра кулі до площини трикутника дорівнює 6 см. Знайдіть радіус кулі.

А. 6,5 см **Б.** 8 см **В.** 9 см **Г.** 7,5 см

4

10. Паралельно осі циліндра проведено площину, яка перетинає основу по хорді, що стягує дугу 120°. Із центра іншої основи цю хорду видно під прямим кутом. Знайдіть радіус основи циліндра, якщо його висота дорівнює $4\sqrt{2}$ см.

А. 6 см **Б.** 8 см **В.** $8\sqrt{2}$ см **Г.** $8\sqrt{3}$ см

11. Площа основи конуса дорівнює S, а його твірна утворює з площиною основи кут α. Знайдіть площу осьового перерізу конуса.

А. $\dfrac{S\text{ctg}\alpha}{\pi}$ **Б.** $\dfrac{S\text{tg}\alpha}{\pi}$ **В.** $S\text{tg}\alpha$ **Г.** $S\pi\text{tg}\alpha$

12. Куля, радіус якої дорівнює 5 см, дотикається до всіх сторін прямокутної трапеції з основами 4 см і 12 см. Знайдіть відстань від центра кулі до площини трапеції.

А. 2 см **Б.** 3 см **В.** 4 см **Г.** 3,5 см

Завдання для перевірки знань до §§ 5–7

1 **1.** Прямокутник зі сторонами 3 см і 5 см обертається навколо меншої сторони. Знайдіть висоту, радіус і діаметр утвореного циліндра.

2. Радіус основи конуса дорівнює 5 см, а твірна – 13 см. Знайдіть висоту конуса.

3. Радіус сфери дорівнює 7 см. Чи може відстань між деякими двома точками, що належать сфері, дорівнювати:
1) 2 см; 2) 11 см; 3) 14 см; 4) 15 см?

2 **4.** Довжина кола основи циліндра дорівнює 8π см, а діагональ осьового перерізу циліндра – 10 см. Знайдіть:
1) довжину твірної циліндра;
2) площу осьового перерізу циліндра.

5. Радіус основи конуса дорівнює $4\sqrt{3}$ см, а твірна нахилена до площини основи під кутом $30°$. Знайдіть:
1) висоту і твірну конуса;
2) площу осьового перерізу конуса.

6. Кулю, радіус якої 17 см, перетнуто площиною на відстані 15 см від центра кулі. Знайдіть площу перерізу.

3 **7.** Висота конуса дорівнює 12 см, а радіус основи – 9 см. Площина, перпендикулярна до осі конуса, перетинає його бічну поверхню по колу, довжина якого 6π см. Знайдіть відстань від вершини конуса до площини перерізу.

4 **8.** Паралельно осі циліндра проведено площину, яка перетинає основу по хорді, що стягує дугу $90°$. Із центра іншої основи цю хорду видно під кутом $60°$. Площа утвореного перерізу дорівнює $16\sqrt{2}$ см^2. Знайдіть висоту циліндра.

Додаткові завдання

3 **9.** Вершини правильного трикутника зі стороною 9 см лежать на поверхні кулі, площа великого круга якої дорівнює 36π см^2. Знайдіть відстань від центра кулі до площини трикутника.

4 **10.** Твірна конуса утворює з його висотою кут α. Знайдіть площу основи конуса, якщо площа його осьового перерізу дорівнює S.

РОЗДІЛ 3

ОБ'ЄМИ І ПЛОЩІ ПОВЕРХОНЬ ГЕОМЕТРИЧНИХ ТІЛ

У ЦЬОМУ РОЗДІЛІ ВИ:

- ***згадаєте*** поняття об'єму геометричного тіла, формули для обчислення об'ємів прямокутного паралелепіпеда та куба;
- ***дізнаєтеся*** про основні властивості об'ємів;
- ***навчитеся*** знаходити об'єми раніше вивчених тіл і площі поверхонь тіл обертання.

§ 8. ОБ'ЄМ ТІЛА. ОБ'ЄМ ПРИЗМИ ТА ПАРАЛЕЛЕПІПЕДА

У цьому параграфі розглянемо одне з понять, яке характеризує геометричне тіло, – поняття об'єму та об'єми деяких тіл.

1. Поняття об'єму

Поняття об'єму геометричного тіла вводиться аналогічно поняттю площі плоскої фігури. Так само як плоска фігура обмежує деяку частину площини, геометричне тіло обмежує деяку частину простору. Кожному геометричному тілу можна поставити у відповідність значення його *об'єму*. Можна вважати, що об'єм геометричного тіла – це величина тієї частини простору, яку обмежує це геометричне тіло. Поняття об'єму вам відомо з повсякденного життя (об'єм пакета із соком, пляшки з водою, об'єм повітря в кімнаті). Також з поняттям об'єму ви ознайомлювалися в попередніх класах.

Основні властивості об'ємів:
1) *об'єм геометричного тіла виражається додатним числом;*
2) *рівні геометричні тіла мають рівні об'єми;*
3) *якщо геометричне тіло складене з кількох тіл, то його об'єм дорівнює сумі об'ємів цих тіл;*
4) *одиницею вимірювання об'ємів є об'єм куба з ребром, що дорівнює одиниці вимірювання довжини.*

Наприклад, якщо за одиницю вимірювання довжини взяти 1 см, то відповідною одиницею вимірювання об'єму буде об'єм куба з ребром 1 см. Такий куб має об'єм 1 см^3 (читається: *один кубічний сантиметр*).

Іншими одиницями вимірювання об'ємів є 1 мм^3, 1 дм^3, 1 м^3.

Об'єм тіла прийнято позначати літерою V.

Тіла, які мають рівні об'єми, називають рівновеликими.

2. Об'єм прямокутного паралелепіпеда

Спосіб обчислення об'єму прямокутного паралелепіпеда, якщо його лінійні виміри (довжина, ширина і висота) виражаються натуральними числами a, b і c, ви знаєте з попередніх класів: *об'єм прямокутного паралелепіпеда дорівнює добутку трьох його вимірів, тобто* $V = abc$.

А як обчислити об'єм прямокутного паралелепіпеда, якщо хоч один з його вимірів є числом дробовим або ірраціональним? Відповідь на це питання дає теорема.

Т Теорема 1 (про об'єм прямокутного паралелепіпеда). **Об'єм прямокутного паралелепіпеда дорівнює добутку трьох його вимірів.**

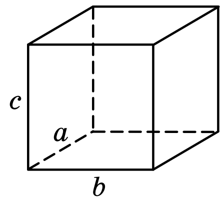
Доведення цієї теореми досить громіздке і виконується аналогічно доведенню теореми про площу прямокутника, розглянутої у 8-му класі. Тому доведення теореми про об'єм прямокутного паралелепіпеда не наводимо. Розглянемо наслідок із цієї теореми.

Н Наслідок. *Об'єм прямокутного паралелепіпеда дорівнює добутку площі основи на висоту.*

Дійсно, нехай, наприклад, грань з ребрами a і b є основою прямокутного паралелепіпеда (мал. 8.1), тоді площа основи S паралелепіпеда дорівнює ab, а висота h паралелепіпеда дорівнює c.

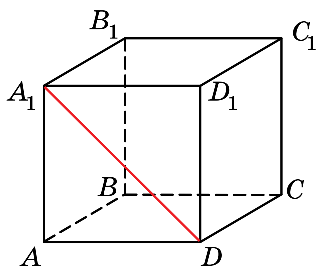
Тому $V = abc = Sh$.

Розглянемо приклади розв'язування задач.



Мал. 8.1

Задача 1. Сторони основи прямокутного паралелепіпеда дорівнюють 2 см і 8 см, а діагональ більшої за площею бічної грані дорівнює 10 см. Знайти об'єм паралелепіпеда.



Мал. 8.2

Розв'язання.

1) Нехай $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – прямокутний паралелепіпед, $AB = 2$ см, $AD = 8$ см, $A_1D = 10$ см (мал. 8.2).

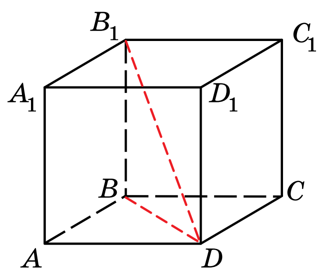
2) У $\triangle AA_1D$ ($\angle A = 90°$):

$$AA_1 = \sqrt{A_1D^2 - AD^2} = \sqrt{10^2 - 8^2} = 6 \text{ (см)}.$$

3) Маємо $V = AB \cdot AD \cdot AA_1 = 2 \cdot 8 \cdot 6 = 96$ (см^3).

Відповідь. 96 см^3.

Задача 2. Основою прямокутного паралелепіпеда є квадрат з діагоналлю 6 см. Знайти об'єм паралелепіпеда, якщо його діагональ нахилена до площини основи під кутом 60°.



Мал. 8.3

Розв'язання.

1) Нехай $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – прямокутний паралелепіпед, у якого основа $ABCD$ – квадрат, $BD = 6$ см, $\angle B_1DB = 60°$ (мал. 8.3).

2) Площа основи $S = \frac{1}{2} \cdot 6^2 = 18$ (см²).

3) У $\triangle BB_1D$ ($\angle B = 90°$):

$BB_1 = BD\text{tg}\angle B_1DB = 6\text{tg}60° = 6\sqrt{3}$ (см), $h = 6\sqrt{3}$ см.

4) Тоді об'єм паралелепіпеда:

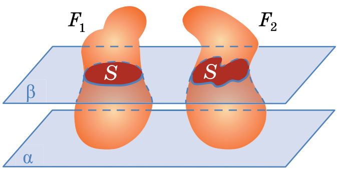
$$V = Sh = 18 \cdot 6\sqrt{3} = 108\sqrt{3} \text{ (см}^3\text{)}.$$

Відповідь. $108\sqrt{3}$ см³.

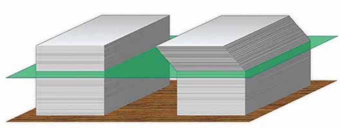
3. Принцип Кавальєрі

У 1635 р. італійський математик Бонавентура Кавальєрі (1598–1647) запропонував один із способів обчислення об'ємів, який отримав у подальшому назву *принцип Кавальєрі*.

Принцип Кавальєрі. **Якщо при перетині двох тіл F_1 і F_2 всіма площинами, паралельними деякій площині α, у перерізі отримують фігури з рівними площами** (мал. 8.4), **то об'єми цих тіл рівні між собою.**



Мал. 8.4



Мал. 8.5

Цей принцип можна пояснити, наприклад, так. Нехай є дві великі пачки друкарського паперу з однаковою кількістю аркушів. Зрозуміло, що об'єми цих пачок рівні між собою. Викладемо ці дві пачки на стіл: одну так, щоб вона набула форми прямокутного паралелепіпеда, а другу так, щоб її верхня частина була трохи зсунута (мал. 8.5).

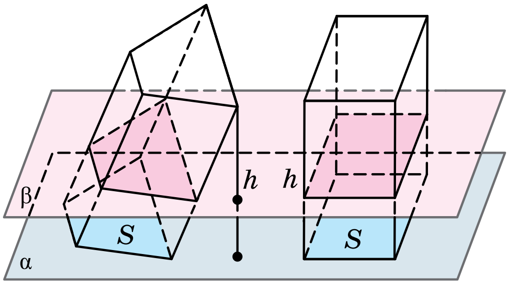
Об'єми утворених тіл рівні, що й стверджується принципом Кавальєрі. Дійсно, висота деформованої пачки не змінилася і кожна площина, паралельна кришці стола, перетинає кожну з пачок по прямокутниках однакової площі.

Сам Кавальєрі обґрунтував свій принцип також наочними міркуваннями, а дещо пізніше з'явилося строге доведення цього факту, яке в цьому підручнику не наводимо.

4. Об'єм призми

Принцип Кавальєрі дає змогу вивести багато формул для обчислення об'ємів.

Теорема 2 (про об'єм призми). **Об'єм призми дорівнює добутку площі її основи на висоту.**



Мал. 8.6

Доведення. Нехай дано довільну призму (пряму або похилу) з площею основи S і висотою h. Нехай на площині α поруч із даною призмою розміщено прямокутний паралелепіпед з площею основи S і висотою h (мал. 8.6). Оскільки висоти призми і паралелепіпеда рівні, то кожна площина β, яка перетинає призму, перетинає і паралелепіпед. Усі відповідні перерізи мають рівні площі, оскільки ці перерізи рівні відповідним основам призми і паралелепіпеда. За принципом Кавальєрі маємо висновок: об'єми призми і паралелепіпеда рівні між собою. Оскільки об'єм паралелепіпеда дорівнює Sh, то об'єм призми також дорівнює Sh. ■

Наслідок 1. *Об'єм прямої призми дорівнює добутку площі її основи на бічне ребро.*

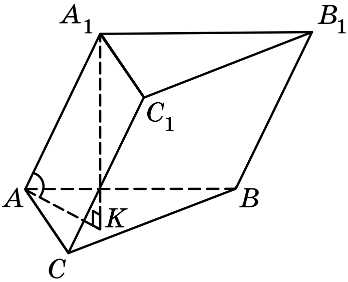
Наслідок 2. *Об'єм похилого паралелепіпеда дорівнює добутку площі його основи на висоту.*

Наслідок 3. *Об'єм прямого паралелепіпеда дорівнює добутку площі його основи на висоту.*

Розглянемо приклади розв'язування задач.

Задача 3. Основою похилої призми є правильний трикутник зі стороною 4 см. Бічне ребро призми дорівнює 6 см і нахилене до площини основи під кутом 30°. Знайти об'єм призми.

Розв'язання. 1) Нехай $ABCA_1B_1C_1$ – задана в умові призма, $\triangle ABC$ – правильний, $AB = 4$ см, $AA_1 = 6$ см, $A_1K = h$ – висота призми, $\angle A_1AK$ – кут нахилу бічного ребра до площини основи, $\angle A_1AK = 30°$ (мал. 8.7).



Мал. 8.7

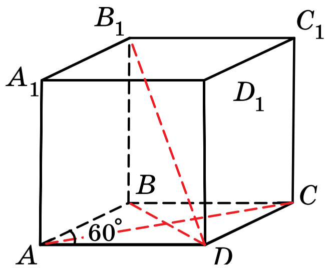
2) Площа основи $S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$, де $a = AB$ – сторона основи. Маємо $S = \frac{4^2\sqrt{3}}{4} = 4\sqrt{3}$ (см^2).

3) У $\triangle AA_1K$ ($\angle K = 90°$): $h = A_1K = \dfrac{AA_1}{2} = \dfrac{6}{2} = 3$ (см) (за властивістю катета, що лежить проти кута 30°).

4) Маємо $V = Sh = 4\sqrt{3} \cdot 3 = 12\sqrt{3}$ (см³).

Відповідь. $12\sqrt{3}$ см³.

Задача 4. Основою прямого паралелепіпеда є ромб зі стороною 8 см і гострим кутом 60°. Менша діагональ паралелепіпеда дорівнює більшій діагоналі ромба. Знайти об'єм паралелепіпеда.



Мал. 8.8

Розв'язання.

1) Нехай $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – заданий в умові паралелепіпед, $ABCD$ – ромб, $AB = 8$ см, $\angle BAD = 60°$ (мал. 8.8).

2) Площа основи:

$S = AB^2 \sin\angle BAD = 8^2 \sin 60° = 64 \times \times \dfrac{\sqrt{3}}{2} = 32\sqrt{3}$ (см²).

3) $\triangle ABD$ – рівносторонній, $BD = AB = 8$ см.

4) У $\triangle ABC$: $\angle ABC = 120°$. За теоремою косинусів:

$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2 \cdot AB \cdot BC \cdot \cos\angle ABC$;

$AC = \sqrt{8^2 + 8^2 - 2 \cdot 8^2 \cdot \cos 120°} = 8\sqrt{3}$ (см).

5) Оскільки $BD < AC$, то B_1D – менша діагональ паралелепіпеда, $B_1D = AC = 8\sqrt{3}$ см.

6) У $\triangle BB_1D$ ($\angle B = 90°$):

$BB_1 = \sqrt{B_1D^2 - BD^2} = \sqrt{(8\sqrt{3})^2 - 8^2} = 8\sqrt{2}$ (см).

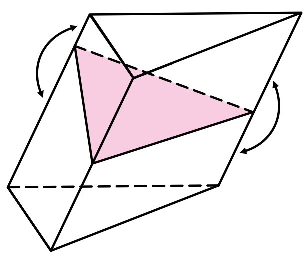
7) Тоді об'єм $V = 32\sqrt{3} \cdot 8\sqrt{2} = 256\sqrt{6}$ (см³).

Відповідь. $256\sqrt{6}$ см³.

Задача 5. У похилій призмі проведено переріз, перпендикулярний до бічних ребер, що перетинає всі бічні ребра (мал. 8.9). Довести, що об'єм призми можна знайти за формулою:

$$V = S_п \cdot l,$$

де $S_п$ – площа перерізу, l – довжина бічного ребра призми.



Мал. 8.9

Доведення. 1) Площина перерізу поділяє призму на дві частини (верхню та нижню). Поміняємо частини місцями, сумістивши основи початкової призми.

2) У цьому випадку отримаємо пряму призму, об'єм якої дорівнює об'єму заданої.
3) У цій прямій призмі основою є переріз заданої, а висотою – бічне ребро заданої призми. Об'єм отриманої прямої призми, а тому і заданої, дорівнює $S_п \cdot l$. ■

● Сформулюйте основні властивості об'ємів. ● Які геометричні тіла називають рівновеликими? ● Сформулюйте теорему про об'єм прямокутного паралелепіпеда та наслідок з неї. ● Сформулюйте й поясніть на прикладі принцип Кавальєрі. ● Сформулюйте й доведіть теорему про об'єм призми. ● Сформулюйте наслідки з теореми про об'єм призми.

Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

1

8.1. Виразіть у мм^3:
1) 4 см^3; 2) 2 см^3 115 мм^3;
3) 5 см^3 2 мм^3; 4) 3 дм^3.

8.2. Виразіть у см^3:
1) 5 дм^3; 2) 2 дм^3 517 см^3;
3) 3 дм^3 4 см^3; 4) 2 м^3.

8.3. Знайдіть об'єм куба, ребро якого дорівнює:
1) 5 см; 2) 7 дм.

8.4. Знайдіть об'єм куба, ребро якого дорівнює:
1) 4 дм; 2) 10 см.

8.5. Знайдіть об'єм прямокутного паралелепіпеда, лінійні виміри якого дорівнюють:
1) 2 дм, 7 дм і 5 дм; 2) 15 см, 0,2 дм і 30 мм.

8.6. Знайдіть об'єм прямокутного паралелепіпеда, лінійні виміри якого дорівнюють:
1) 3 см, 8 см і 9 см; 2) 12 дм, 0,3 м і 50 см.

8.7. Знайдіть об'єм прямокутного паралелепіпеда, площа основи якого дорівнює 30 см^2, а висота – 12 см.

8.8. Знайдіть об'єм прямокутного паралелепіпеда, площа основи якого дорівнює 24 дм^2, а висота – 5 дм.

8.9. Об'єм призми дорівнює 200 см^3, а площа основи – 20 см^2. Знайдіть висоту призми.

8.10. Об'єм призми дорівнює 300 см^3, а її висота – 15 см. Знайдіть площу основи призми.

2

8.11. Сторони основи прямого паралелепіпеда дорівнюють $2\sqrt{3}$ см і 7 см та утворюють кут $60°$. Знайдіть об'єм паралелепіпеда, якщо його бічне ребро дорівнює 5 см.

8.12. Основою прямого паралелепіпеда є ромб зі стороною 8 см і гострим кутом 30°. Знайдіть об'єм паралелепіпеда, якщо його бічне ребро дорівнює 10 см.

8.13. Сторони основи прямокутного паралелепіпеда дорівнюють 3 см і 5 см, а діагональ більшої за площею бічної грані – 13 см. Знайдіть об'єм паралелепіпеда.

8.14. Сторони основи прямокутного паралелепіпеда дорівнюють 4 см і 8 см, а діагональ меншої за площею бічної грані – 5 см. Знайдіть об'єм паралелепіпеда.

8.15. Основа прямого паралелепіпеда – ромб зі стороною 4 см і кутом 60°. Менша діагональ паралелепіпеда нахилена до площини основи під кутом 45°. Знайдіть об'єм паралелепіпеда.

8.16. Основа прямого паралелепіпеда – квадрат, периметр якого дорівнює 20 см. Знайдіть об'єм паралелепіпеда, якщо діагональ бічної грані утворює з площиною основи кут 45°.

8.17. Сторона основи правильної чотирикутної призми дорівнює 6 см, а її об'єм – 180 см^3. Знайдіть висоту призми.

8.18. Основа прямої призми – трикутник з основою 6 см і висотою, проведеною до неї, 10 см. Знайдіть висоту призми, якщо її об'єм дорівнює 150 см^3.

8.19. Відро вміщує приблизно 12 л. Скільки відер води потрібно, щоб заповнити ванну, яка має форму прямокутного паралелепіпеда з вимірами 50 см, 1 м 60 см і 70 см? (Відповідь округліть до цілих.)

8.20. Відро вміщує приблизно 8 л. Скільки відер води потрібно, щоб заповнити скляний куб з ребром 50 см? (Відповідь округліть до цілих.)

8.21. Класні кімнати повинні бути розраховані так, щоб на одного учня було не менше ніж 6 м^3 повітря. Чи можуть у класній кімнаті, яка має форму прямокутного паралелепіпеда з вимірами 8 м, 5,5 м і 3 м, навчатися 23 дітей без порушення санітарних норм?

8.22. Об'єм куба дорівнює 64 см^3. Знайдіть повну поверхню куба.

8.23. Повна поверхня куба дорівнює 54 см^2. Знайдіть об'єм куба.

8.24. Розміри цеглини 25 см $\times$ 12 см $\times$ 6,5 см. Знайдіть масу однієї цеглини, якщо її густина дорівнює 1700 кг/м^3.

8.25. Екскаватор викопав яму у формі куба, ребро якого дорівнює 4 м. Скільки вантажівок потрібно, щоб вивезти всю землю, якщо одна вантажівка вміщує 2,5 м^3 землі?

8.26. Міський голова вирішив покрити асфальтом прямолінійну ділянку дороги завширшки 15 м і завдовжки 200 м. Товщина асфальту на цій дорозі – 5 см. Скільки потрібно машин асфальту, якщо густина асфальту дорівнює 2,4 т/м^3, а вантажопідйомність машини – 5 т?

8.27. Скільки дошок завдовжки 2,5 м, завширшки 20 см і завтовшки 20 мм можна отримати із чотирикутної балки завдовжки 10 м, що має в перерізі прямокутник розмірами 40 см × 30 см?

8.28. Знайдіть об'єм деталі, зображеної на малюнку 2.6 (див с. 192).

8.29. Знайдіть об'єм деталі, зображеної на малюнку 2.7 (див. с. 192).

8.30. Бічне ребро прямокутного паралелепіпеда дорівнює $10\sqrt{3}$ см, а одна зі сторін основи – 8 см. Знайдіть об'єм паралелепіпеда, якщо його діагональ нахилена до площини основи під кутом 60°.

8.31. Бічне ребро прямокутного паралелепіпеда дорівнює $4\sqrt{3}$ см, а діагональ основи – 20 см. Знайдіть об'єм паралелепіпеда, якщо одна з діагоналей бічної грані нахилена до площини основи під кутом 30°.

8.32. 1 м^3 золота важить приблизно 19 т. Чи може людина підняти куб золота, ребро якого 30 см?

8.33. Основа прямої призми – рівнобедрений трикутник з основою 6 см і периметром 16 см. Знайдіть об'єм призми, якщо дві її бічні грані квадрати.

8.34. Основа прямої призми – рівнобедрений трикутник з бічною стороною 10 см і периметром 36 см. Знайдіть об'єм призми, якщо одна з її бічних граней – квадрат, а дві інші – не є квадратами.

8.35. Об'єм прямої призми дорівнює 168 см^3, а її бічне ребро – 7 см. Основа призми – прямокутний трикутник з катетом 6 см. Знайдіть площу бічної поверхні призми.

8.36. Основа прямої призми – прямокутний трикутник з катетами 5 см і 12 см. Знайдіть площу бічної поверхні призми, якщо її об'єм дорівнює 240 см^3.

8.37. Основа похилого паралелепіпеда – прямокутник з діагоналлю 10 см і кутом між діагоналями 30°. Бічне ребро паралелепіпеда дорівнює $4\sqrt{2}$ см і утворює з площиною основи кут 45°. Знайдіть об'єм паралелепіпеда.

8.38. Основа похилого паралелепіпеда – квадрат з діагоналлю 6 см. Бічне ребро паралелепіпеда дорівнює $4\sqrt{3}$ см і утворює з площиною основи кут 60°. Знайдіть об'єм паралелепіпеда.

8.39. Основою прямого паралелепіпеда є ромб з периметром 20 см і діагоналлю 8 см. Менша діагональ паралелепіпеда дорівнює 10 см. Знайдіть об'єм паралелепіпеда.

8.40. Основою прямого паралелепіпеда є ромб з периметром 40 см і діагоналлю 12 см. Більша діагональ паралелепіпеда дорівнює 20 см. Знайдіть об'єм паралелепіпеда.

8.41. Профіль русла річки має форму рівнобічної трапеції, основи якої дорівнюють 15 м і 9 м, а висота – 3 м. Швидкість течії дорівнює 1 м/с. Який об'єм води проходить через цей профіль за 1 хв?

8.42. Переріз залізничного насипу має вигляд рівнобічної трапеції, верхня основа якої дорівнює 12 м, нижня – 27 м, а висота – 4,5 м. Знайдіть об'єм 1 км насипу.

8.43. Діагональ прямокутного паралелепіпеда дорівнює 12 см і нахилена до площини основи під кутом $60°$. Знайдіть об'єм паралелепіпеда, якщо кут між діагоналями основи дорівнює $30°$.

8.44. Діагональ прямокутного паралелепіпеда нахилена до площини основи під кутом $45°$. Діагональ основи утворює з однією зі сторін основи кут $30°$. Знайдіть об'єм паралелепіпеда, якщо його висота дорівнює 8 см.

8.45. У прямій трикутній призмі сторони основи дорівнюють 13 см, 21 см і 20 см. Через бічне ребро призми та середню за довжиною висоту основи проведено переріз, площа якого дорівнює 63 $см^2$. Знайдіть об'єм призми.

8.46. У прямій трикутній призмі сторони основи дорівнюють 13 см, 14 см і 15 см. Через бічне ребро призми та найменшу за довжиною висоту основи проведено переріз, площа якого дорівнює 112 $см^2$. Знайдіть об'єм призми.

8.47. Основою прямого паралелепіпеда є квадрат з діагоналлю $6\sqrt{2}$ см. Знайдіть об'єм паралелепіпеда, якщо його повна поверхня дорівнює 240 $см^2$.

8.48. Основою прямого паралелепіпеда є паралелограм зі сторонами 4 см і 5 см та гострим кутом $30°$. Знайдіть об'єм паралелепіпеда, якщо його повна поверхня дорівнює 74 $см^2$.

8.49. Діагональ бічної грані прямокутного паралелепіпеда дорівнює $8\sqrt{2}$ см. Діагональ паралелепіпеда утворює з площиною цієї грані кут $45°$, а з площиною основи – кут $30°$. Знайдіть об'єм паралелепіпеда.

8.50. Діагональ прямокутного паралелепіпеда дорівнює 10 см і утворює з бічними гранями кути $30°$ і $45°$. Знайдіть об'єм паралелепіпеда.

8.51. Основою похилої призми є правильний трикутник зі стороною $4\sqrt{3}$ см. Одна з вершин верхньої основи проектується в центр нижньої. Бічні ребра призми утворюють з площиною основи кут $60°$. Знайдіть об'єм призми.

8.52. Основою похилої призми є квадрат зі стороною 8 см. Одна з вершин верхньої основи проектується в центр нижньої. Бічні ребра призми утворюють з площиною основи кут $45°$. Знайдіть об'єм призми.

8.53. В основі прямої призми лежить прямокутний трикутник з гострим кутом α. Діагональ бічної грані, що містить гіпотенузу, дорівнює d і утворює з площиною основи призми кут β. Знайдіть об'єм призми.

8.54. В основі прямої призми лежить прямокутний трикутник з кутом α і гіпотенузою c. Діагональ грані, що містить катет, прилеглий до даного кута, утворює з площиною основи кут β. Знайдіть об'єм призми.

4 **8.55.** В основі прямої призми лежить рівнобедрений трикутник з бічною стороною a і кутом при вершині β. Через сторону основи і протилежну вершину іншої основи проведено переріз, який утворює з площиною кут γ. Знайдіть об'єм призми.

8.56. Сторона основи правильної трикутної призми дорівнює a. Через цю сторону і середину протилежного бічного ребра проведено переріз, який утворює з площиною основи кут α. Знайдіть об'єм призми.

8.57. Площі трьох граней прямокутного паралелепіпеда дорівнюють 12 $см^2$, 21 $см^2$ і 28 $см^2$. Знайдіть об'єм прямокутного паралелепіпеда.

8.58. Периметри трьох граней прямокутного паралелепіпеда дорівнюють 12 см, 18 см і 14 см. Знайдіть об'єм прямокутного паралелепіпеда.

8.59. В основі похилої призми лежить правильний трикутник зі стороною 10 см. Одна з бічних граней призми перпендикулярна до площини основи та являє собою ромб, діагональ якого дорівнює 12 см. Знайдіть об'єм призми.

8.60. Основою похилого паралелепіпеда є квадрат зі стороною 6 см. Одна з бічних граней паралелепіпеда перпендикулярна до площини основи та являє собою паралелограм, периметр якого дорівнює 20 см, а гострий кут – $30°$. Знайдіть об'єм паралелепіпеда.

8.61. Основою похилого паралелепіпеда є прямокутник зі сторонами 4 см і 5 см. Одне з бічних ребер паралелепіпеда дорівнює 2 см і утворює із суміжними сторонами основи кути по $60°$. Знайдіть об'єм паралелепіпеда.

8.62. Основою похилого паралелепіпеда є квадрат зі стороною 8 см. Одне з бічних ребер паралелепіпеда дорівнює 4 см і утворює із суміжними сторонами основи кути по 60°. Знайдіть об'єм паралелепіпеда.

8.63. Дві бічні грані похилої трикутної призми мають площі 20 см^2 і 30 см^2 та утворюють кут 120°. Знайдіть об'єм призми, якщо її бічне ребро дорівнює 5 см.

8.64. Дві бічні грані похилої трикутної призми мають площі 24 см^2 і 30 см^2 та утворюють прямий кут. Знайдіть об'єм призми, якщо її бічне ребро дорівнює 6 см.

Життєва математика

8.65. Діаметр коловорота колодязя 35 см, глибина колодязя до води 8,7 м. Скільки разів треба повернути рукоятку коловорота, щоб витягти відро з води?

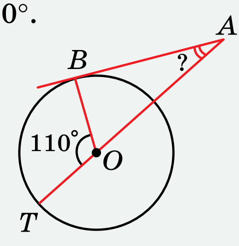
8.66. Поле стадіону має форму прямокутника, з двох сторін до якого примикають півкола. Довжина бігової доріжки навколо поля дорівнює 400 м. Довжина кожної з двох прямолінійних ділянок доріжки дорівнює 100 м. Знайдіть ширину поля стадіону.

Перевірте свою компетентність!

Завдання № 8

1. До кола проведено дотичну AB (B – точка дотику) та січну, що проходить через центр кола (див. мал.). Знайдіть градусну міру кута BAO, якщо $\angle BOT = 110°$.

А	Б	В	Г	Д
10°	20°	30°	40°	інша відповідь



2. Довжина кола основи конуса дорівнює 6π см. Знайдіть довжину висоти конуса, якщо його твірна дорівнює 5 см.

А	Б	В	Г	Д
1 см	2 см	3 см	4 см	$\sqrt{11}$ см

3. Яким числом не може виражатися градусна міра плоского кута при вершині правильної чотирикутної піраміди?

А	Б	В	Г	Д
79°	82°	91°	45°	13°

4. Яка з точок належить осі аплікат?

А	Б	В	Г	Д
(3; –1; 0)	(0; –3; 0)	(0; 0; –11)	(2; 0; 0)	(–2; –1; 8)

5. Дано вектори $\vec{a}(4; 0; 4)$, $\vec{b}(-1; 2; 2)$, $\vec{p}(8; m; -1)$. Установіть відповідність між характеристикою векторів або результатом дії над ними (1–4) та її або його числовим значенням (А–Д).

Характеристика векторів або результат дії над ними	*Числове значення*
1 модуль вектора $\vec{b}$	**А** 7
2 модуль вектора $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$	**Б** 6
3 скалярний добуток векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$	**В** 5
4 значення m, при якому вектори $\vec{b}$ і $\vec{p}$ перпендикулярні	**Г** 4
	Д 3

	А	Б	В	Г	Д
1					
2					
3					
4					

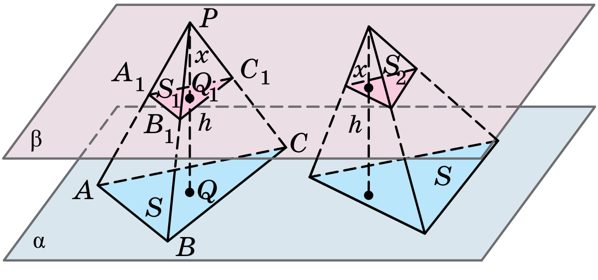
6. Сторона рівностороннього трикутника ABC дорівнює 6. Обчисліть скалярний добуток $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CA}$.

§ 9. ОБ’ЄМ ПІРАМІДИ

У цьому параграфі навчимося знаходити об’єм піраміди. Спочатку доведемо допоміжну теорему – лему.

Лема (про рівновеликість трикутних пірамід з рівними висотами і рівновеликими основами). **Трикутні піраміди з рівними площами основ і рівними висотами мають рівні об’єми.**

Доведення. 1) Розглянемо дві трикутні піраміди, кожна з яких має площу основи S і висоту h. Розмістимо ці дві піраміди на деяку площину α (мал. 9.1).



Мал. 9.1

2) Оскільки висоти пірамід рівні, то кожна площина β, паралельна площині α, яка перетинає першу піраміду, перетинає і другу. Проведемо площину β на відстані x від вершини піраміди.

3) Нехай в перерізі першої піраміди отримали трикутник площею S_1. Можна довести, що трикутники ABC і $A_1B_1C_1$ подібні (зробіть це самостійно).

Тому $\frac{S_1}{S} = \left(\frac{l_1}{l}\right)^2$, де l_1 і l – деякі відповідні лінійні елементи $\triangle A_1B_1C_1$ і $\triangle ABC$.

4) $\triangle PQ_1B_1 \sim \triangle PQB$, тому $\frac{x}{h} = \frac{B_1Q_1}{BQ}$. Але B_1Q_1 і BQ – відповідні лінійні елементи $\triangle A_1B_1C_1$ і $\triangle ABC$.

5) Маємо $\frac{S_1}{S} = \left(\frac{x}{h}\right)^2$.

6) Аналогічно для другої піраміди $\frac{S_2}{S} = \left(\frac{x}{h}\right)^2$, де S_2 – площа трикутника, отриманого при перерізі піраміди площиною β.

7) Маємо $\frac{S_1}{S} = \frac{S_2}{S}$, звідки $S_1 = S_2$.

8) Застосовуючи принцип Кавальєрі, отримаємо рівновеликість розглядуваних трикутних пірамід. ■

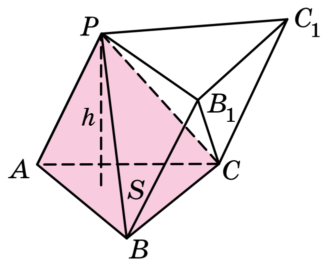
Зауважимо, що дана лема справджується для будь-яких пірамід з рівними висотами і рівновеликими основами, а не лише для трикутних.

Т Теорема 1 (про об'єм піраміди). **Об'єм піраміди дорівнює третині добутку площі її основи на висоту.**

Доведення. 1) Доведемо спочатку цю теорему для трикутної піраміди $PABC$, у якої площа основи дорівнює S, а висота – h.

2) Проведемо відрізки BB_1 і CC_1, паралельні та рівні бічному ребру піраміди AP (мал. 9.2). Сполучивши відрізками P і B_1, B_1 і C_1, P і C_1, B_1 і C, отримаємо трикутну призму $ABCPB_1C_1$, об'єм якої дорівнює Sh.

3) Отримана призма складається з трьох пірамід: $PABC$, CPB_1C_1 і $PBCB_1$. Піраміди $PABC$ і CPB_1C_1 мають рівні основи і висоти, а тому за лемою рівновеликі.



Мал. 9.2

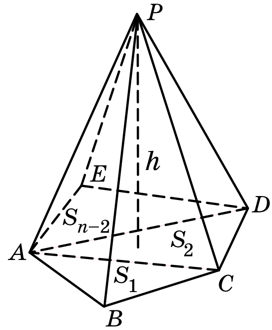
4) Візьмемо за основи пірамід CPB_1C_1 і $PBCB_1$ трикутники C_1B_1C і BCB_1. Ці трикутники рівновеликі. Висоти пірамід, які розглядають, також рівні. Таким чином, піраміди CPB_1C_1 і $PBCB_1$ – рівновеликі.

5) Отже, усі три піраміди $PABC$, CPB_1C_1 і $PBCB_1$ – рівновеликі, об'єм кожної з них дорівнює третині об'єму призми, тобто $\frac{1}{3}Sh$. Для трикутних пірамід теорему доведено.

6) Розглянемо тепер n-кутну піраміду (мал. 9.3). Її можна розбити на $(n - 2)$ трикутні піраміди, висота кожної з них дорівнює h, а площі основ S_1, S_2, ..., S_{n-2}.

Об'єм даної піраміди дорівнює сумі об'ємів цих трикутних пірамід:

$$V = V_1 + V_2 + ... + V_{n-2} =$$
$$= \frac{1}{3}S_1h + \frac{1}{3}S_2h + ... + \frac{1}{3}S_{n-2}h =$$
$$= \frac{1}{3}(S_1 + S_2 + ... + S_{n-2})h = \frac{1}{3}Sh. \blacksquare$$

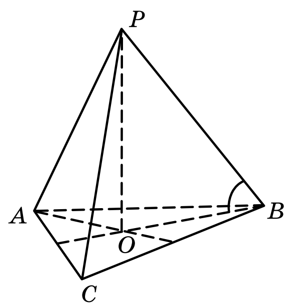


Мал. 9.3

Розглянемо задачі.

Задача 1. Сторона основи правильної трикутної піраміди дорівнює 6 см, а бічне ребро утворює з площиною основи кут 45°. Знайти об'єм піраміди.

Розв'язання. 1) Нехай $PABC$ – задана в умові піраміда, де $\triangle ABC$ – правильний, BC = 6 см, PO – висота піраміди, $\angle PBO = 45°$ (мал. 9.4).



Мал. 9.4

2) Площа основи $S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$, де $a = BC =$ = 6 см – сторона основи.

Маємо $S = \frac{6^2\sqrt{3}}{4} = 9\sqrt{3}$ (см²).

3) Оскільки O – центр трикутника, то OB – радіус кола, описаного навколо основи, $OB = \frac{a\sqrt{3}}{3} = \frac{6\sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{3}$ (см).

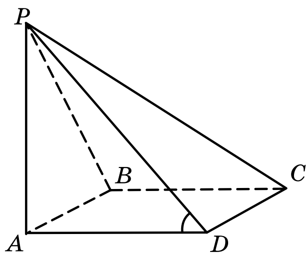
4) У $\triangle POB$ ($\angle O = 90°$, $\angle PBO = 45°$):
$\angle OPB = 180° - (90° + 45°) = 45°$.
Тому $\triangle POB$ – рівнобедрений і $PO = OB = 2\sqrt{3}$ см.

5) Об'єм піраміди $V = \frac{1}{3} \cdot S \cdot PO = \frac{1}{3} \cdot 9\sqrt{3} \cdot 2\sqrt{3} = 18$ (см³).

Відповідь. 18 см³.

Задача 2. В основі піраміди лежить квадрат. Дві бічні грані піраміди перпендикулярні до площини основи, а дві інші – нахилені до неї під кутом 30°. Знайти об'єм піраміди, якщо середнє за довжиною бічне ребро дорівнює 8 см.

Розв'язання. 1) Нехай $PABCD$ – задана в умові піраміда, де $ABCD$ – квадрат, бічні грані PAB і PAD – перпендикулярні до площини основи (мал. 9.5).



Мал. 9.5

2) Оскільки бічні грані PAB і PAD перпендикулярні до площини основи, то бічне ребро PA, по якому перетинаються ці грані, також перпендикулярне до основи. Тому $PA = h$ – висота піраміди.

3) $AD \perp DC$, тому за теоремою про три перпендикуляри $PD \perp DC$. А отже, $(PAD) \perp DC$. Тому $\angle PDA$ – кут, що утворює бічна грань PDC з площиною основи, $\angle PDA = 30°$ (за умовою).

4) Оскільки $\triangle PAD$ – прямокутний ($\angle A = 90°$), то $PD > PA$. Також маємо $PD = PB$ (з рівності трикутників PAD і PAB), а у $\triangle PDC$ $PD < PC$. Тому PD – середнє за довжиною бічне ребро, $PD = 8$ см (за умовою).

5) У $\triangle PAD$ ($\angle A = 90°$): $PA = \dfrac{8}{2} = 4$ (см) (за властивістю катета, що дорівнює половині гіпотенузи):

$AD = \sqrt{PD^2 - PA^2} = \sqrt{8^2 - 4^2} = 4\sqrt{3}$ (см).

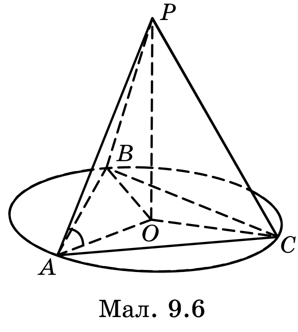
6) Площа основи $S = AD^2 = (4\sqrt{3})^2 = 48$ (см²).

7) Об'єм піраміди $V = \dfrac{1}{3}Sh = \dfrac{1}{3} \cdot 48 \cdot 4 = 64$ (см³).

Відповідь. 64 см³.

Задача 3. Основою піраміди є трикутник зі сторонами 5 см, 6 см і 8 см. Усі бічні ребра нахилені до площини основи під кутом 60°. Знайти об'єм піраміди.

Розв'язання. 1) Нехай $PABC$ – задана в умові піраміда, де $AB = 5$ см, $BC = 6$ см, $AC = 8$ см (мал. 9.6).



Мал. 9.6

2) Оскільки $\angle PAO = \angle PBO = \angle PCO = 60°$, то $\triangle PAO = \triangle PBO = \triangle PCO$ (за катетом і протилежним гострим кутом). Тому $OA = OB = OC$, а отже, точка O – центр описаного навколо $\triangle ABC$ кола, а $AO = R$ – радіус цього кола.

3) У $\triangle POA$: $PO = R\operatorname{tg}\angle PAO = R\sqrt{3}$ (см).

4) $V = \frac{1}{3}S \cdot PO.$

5) Оскільки $R = \frac{AB \cdot BC \cdot CA}{4S}$, то маємо:

$$V = \frac{1}{3}S \cdot \frac{AB \cdot BC \cdot CA}{4S} \cdot \sqrt{3} = \frac{5 \cdot 6 \cdot 8 \cdot \sqrt{3}}{12} = 20\sqrt{3}\ (\text{см}^3).$$

Відповідь. $20\sqrt{3}$ см^3.

А ще раніше...

Безпосереднього обчислення об’ємів многогранників і інших тіл у Евкліда немає, є лише порівняння об’ємів тіл. Однак у його праці трапляється доведення, що трикутна призма розкладається на три рівновеликі піраміди. Таким чином, Евклід одночасно доводить, що об’єм піраміди дорівнює третині об’єму призми з такими самими основою і висотою.

Для окремого випадку чотирикутної піраміди з двома бічними гранями, нахиленими під кутом 45° до основи, об’єм обчислили ще древні вавилоняни.

Уперше формулу для обчислення об’єму будь-якої піраміди запропонував Демокріт із Абдери(IV ст. до н. е.), але припускають, що її строгого доведення він не надав.

Вважається, що першим строго довів формулу для обчислення об’єму піраміди Евдокс Кнідський.

• Сформулюйте й доведіть лему про рівновеликість трикутних пірамід з рівними висотами і рівновеликими основами. • Сформулюйте й доведіть теорему про об’єм піраміди.

Розв’яжіть задачі та виконайте вправи

1

9.1. Площа основи піраміди дорівнює 30 см^2, а висота – 7 см. Знайдіть об’єм піраміди.

9.2. Висота піраміди дорівнює 12 см, а площа основи – 19 см^2. Знайдіть об’єм піраміди.

9.3. Знайдіть об’єм піраміди, основою якої є прямокутник зі сторонами 4 см і 5 см, якщо висота піраміди дорівнює 9 см.

9.4. Знайдіть об’єм піраміди, основою якої є квадрат зі стороною 3 см, якщо висота піраміди дорівнює 5 см.

9.5. Об’єм піраміди дорівнює 32 см^3, а висота – 6 см. Знайдіть площу основи.

9.6. Об’єм піраміди дорівнює 80 см^3, а площа основи – 60 см^2. Знайдіть висоту піраміди.

2 **9.7.** Основою піраміди є трапеція з основами 3 см і 5 см та висотою 7 см. Знайдіть об'єм піраміди, якщо її висота дорівнює 6 см.

9.8. Основою піраміди є ромб зі стороною 6 см і висотою 4 см. Знайдіть об'єм піраміди, якщо її висота дорівнює 7 см.

9.9. Сторона основи правильної трикутної піраміди дорівнює 6 см, а двогранний кут при основі піраміди – 60°. Знайдіть об'єм піраміди.

9.10. Сторона основи правильної чотирикутної піраміди дорівнює 8 см, а двогранний кут при основі піраміди – 45°. Знайдіть об'єм піраміди.

9.11. Висота правильної чотирикутної піраміди дорівнює 9 см і утворює з бічним ребром кут 45°. Знайдіть об'єм піраміди.

9.12. Висота правильної трикутної піраміди дорівнює 3 см і утворює з бічним ребром кут 60°. Знайдіть об'єм піраміди.

9.13. Об'єм правильної трикутної піраміди дорівнює $15\sqrt{3}$ см^3, а висота – 5 см. Знайдіть сторону основи піраміди.

9.14. Об'єм правильної чотирикутної піраміди дорівнює 216 см^3, а висота – 8 см. Знайдіть сторону основи піраміди.

9.15. Як зміниться об'єм правильної піраміди, якщо кожну сторону основи збільшити, а висоту зменшити вдвічі?

9.16. Основою піраміди є прямокутник, а висота піраміди проходить через одну з вершин основи. Бічні грані, що не містять висоту, нахилені до площини основи під кутами 30° і 45°. Знайдіть об'єм піраміди, якщо висота дорівнює 6 см.

9.17. Основою піраміди є квадрат, а висота піраміди проходить через одну з вершин основи. Знайдіть об'єм піраміди, якщо її висота дорівнює $9\sqrt{3}$ см, а бічна грань, яка не містить висоти, нахилена до площини основи під кутом 60°.

9.18. Основою піраміди є прямокутний трикутник з катетом 6 см і радіусом описаного навколо нього кола 5 см. Знайдіть об'єм піраміди, якщо її висота дорівнює 4 см.

9.19. Основою піраміди є прямокутник, одна сторона якого дорівнює 10 см, а радіус описаного навколо нього кола 13 см. Знайдіть об'єм піраміди, якщо її висота дорівнює 7 см.

3 **9.20.** Основою піраміди є прямокутник, сторони якого дорівнюють 18 см і 24 см. Кожне бічне ребро піраміди дорівнює 25 см.

1) Доведіть, що основою висоти піраміди є точка перетину діагоналей основи.
2) Знайдіть об'єм піраміди.

9.21. Основою піраміди є прямокутний трикутник, катети якого дорівнюють 12 см і 16 см. Кожне бічне ребро піраміди дорівнює 26 см.

1) Доведіть, що основою висоти піраміди є середина гіпотенузи основи.
2) Знайдіть об'єм піраміди.

9.22. Основа піраміди – прямокутний трикутник з меншим катетом 5 см і гострим кутом 30°. Кожне бічне ребро піраміди дорівнює 13 см. Знайдіть об'єм піраміди.

9.23. Основа піраміди – прямокутник з більшою стороною $6\sqrt{3}$ см і кутом 60°, який утворює діагональ основи з меншою стороною. Кожне бічне ребро піраміди дорівнює 10 см. Знайдіть об'єм піраміди.

9.24. Від куба з ребром 12 см площиною, що проходить через середини трьох його ребер, які мають спільну вершину, відрізано тіло. Знайдіть об'єм відрізаного тіла.

9.25. Об'єм правильної трикутної призми дорівнює V. Через сторону основи і середину протилежного бічного ребра проведено переріз. Знайдіть об'єм піраміди, яка утворилася.

9.26. Об'єм прямої призми дорівнює V. Через одну із сторін основи і протилежну вершину іншої основи проведено переріз. Знайдіть об'єм піраміди, яка утворилася.

9.27. У правильній чотирикутній піраміді бічне ребро дорівнює 10 см і утворює з площиною основи кут 60°. Знайдіть об'єм піраміди.

9.28. У правильній трикутній піраміді бічне ребро дорівнює $8\sqrt{2}$ см і утворює з площиною основи кут 45°. Знайдіть об'єм піраміди.

9.29. У правильній трикутній піраміді бічні грані утворюють з площиною основи кути по 60°. Знайдіть об'єм піраміди, якщо її висота дорівнює 6 см.

9.30. У правильній чотирикутній піраміді бічні грані утворюють з площиною основи кути по 30°. Знайдіть об'єм піраміди, якщо її висота дорівнює 6 см.

9.31. Піраміда Хефрена в Єгипті зараз являє собою правильну чотирикутну піраміду, сторона основи якої приблизно дорівнює 210,5 м, а бічне ребро нахилено до площини основи під кутом 42°30′. Знайдіть приблизний об'єм цієї піраміди.

9.32. Піраміда Хеопса в Єгипті зараз являє собою правильну чотирикутну піраміду, сторона основи якої приблизно дорівнює 230,5 м, а бічна грань нахилена до площини основи під кутом 51°50′. Знайдіть приблизний об'єм цієї піраміди.

9.33. Двогранний кут при основі правильної трикутної піраміди дорівнює $45°$, а відрізок, що сполучає середину висоти і середину апофеми, – 2 см. Знайдіть об'єм піраміди.

9.34. Двогранний кут при основі правильної чотирикутної піраміди дорівнює $30°$, а відрізок, що сполучає основу висоти піраміди і середину апофеми, – 4 см. Знайдіть об'єм піраміди.

4 **9.35.** Обчисліть об'єм правильного тетраедра, якщо радіус кола, описаного навколо його грані, дорівнює R.

9.36. Бічне ребро правильної трикутної піраміди дорівнює l, а висота – h. Знайдіть об'єм піраміди.

9.37. Три бічних ребра піраміди, що виходять з однієї вершини, попарно перпендикулярні та мають довжини 4 см, 5 см і 6 см. Знайдіть об'єм цієї піраміди.

9.38. В основі чотирикутної піраміди лежить прямокутник з діагоналлю d та кутом α, що утворює діагональ з однією зі сторін основи. Усі бічні ребра піраміди мають довжину l. Знайдіть об'єм піраміди.

9.39. В основі трикутної піраміди лежить прямокутний трикутник з катетом b та протилежним гострим кутом β. Усі бічні ребра піраміди мають довжину l. Знайдіть об'єм піраміди.

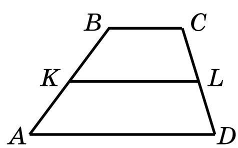
9.40. Основою піраміди є трикутник зі сторонами 12 см, 10 см і 10 см. Усі бічні грані піраміди нахилені до основи під кутом $45°$. Знайдіть об'єм піраміди.

9.41. Основою піраміди є прямокутний трикутник з катетами 9 см і 12 см. Висоти всіх бічних граней рівні між собою і дорівнюють 5 см. Знайдіть об'єм піраміди.

9.42. Основою піраміди є рівнобічна трапеція з тупим кутом $120°$ і діагоналлю $8\sqrt{3}$ см. Ця діагональ перпендикулярна до бічної сторони трапеції. Знайдіть об'єм трапеції, якщо всі її бічні ребра дорівнюють 10 см.

Життєва математика

9.43. Шкільний психолог Ірина Іванівна веде здоровий спосіб життя та долає щодня дорогу від дому (точка A) до роботи (точка C) на велосипеді (мал. 9.7). $ABCD$ – трапеція, у якої AD = = 4 км, AB = 2,5 км, CD = 1,7 км, висота трапеції дорівнює 1,5 км, точки K і L – відповідно середини AB і CD. Усі ділянки шляху, крім BC, асфальтовані, ділянка



Мал. 9.7

BC – ґрунтова дорога. По асфальтованій дорозі Ірина Іванівна рухається зі швидкістю 20 км/год, а по ґрунтовій – удвічі повільніше. Коли Ірина Іванівна поспішає, то хоче дістатися до роботи якнайшвидше, а коли має час – то найповільніше, щоб отримати фізичне навантаження. Заповніть таблицю та допоможіть Ірині Іванівні.

Маршрут	Час у дорозі
AB; BC	
AD; DC	
AK; KL; LC	

9.44. Прямокутна ділянка городу з огірками завдовжки 25 м і завширшки 10 м. Скільки відер води необхідно, щоб її полити, якщо на кожний квадратний метр цього городу потрібно 4 л води, а відро вміщає 12,5 л?

Перевірте свою компетентність!

Завдання № 9

1. Знайдіть периметр квадрата, який рівновеликий ромбу зі стороною 6 см і гострим кутом 30°.

А	Б	В	Г	Д
24 см	$24\sqrt{2}$ см	12 см	$12\sqrt{2}$ см	18 см

2. Точка $P(4; -2)$ належить колу із центром у точці $O(1; 2)$. Знайдіть радіус кола.

А	Б	В	Г	Д
2	4	5	10	інша відповідь

3. Знайдіть довжину ребра куба, площа поверхні якого дорівнює 54 см^2.

А	Б	В	Г	Д
2 см	3 см	4 см	5 см	9 см

4. Який з векторів колінеарний вектору $\vec{p}(-2; 1; 0)$?

А	Б	В	Г	Д
$(-4; -2; 0)$	$(-4; 2; 1)$	$(4; -2; 0)$	$(4; 2; 0)$	жодний з наведених

5. Установіть відповідність між довжинами сторін трикутника (1–4) та його видом (А–Д).

Довжини сторін		*Вид трикутника*	
1	6 см, 6 см, 6 см	**А**	рівнобедрений
2	6 см, 8 см, 10 см	**Б**	прямокутний
3	6 см, 7 см, 9 см	**В**	рівносторонній
4	6 см, 7 см, 11 см	**Г**	різносторонній гострокутний
		Д	різносторонній тупокутний

	А	Б	В	Г	Д
1					
2					
3					
4					

6. Паралелограм $ABCD$ побудовано на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$ як на сторонах. Відомо, що $|\vec{a}| = 5$, $|\vec{b}| = 3$, $|\vec{a} - \vec{b}| = 7$. Знайдіть градусну міру кута між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$.

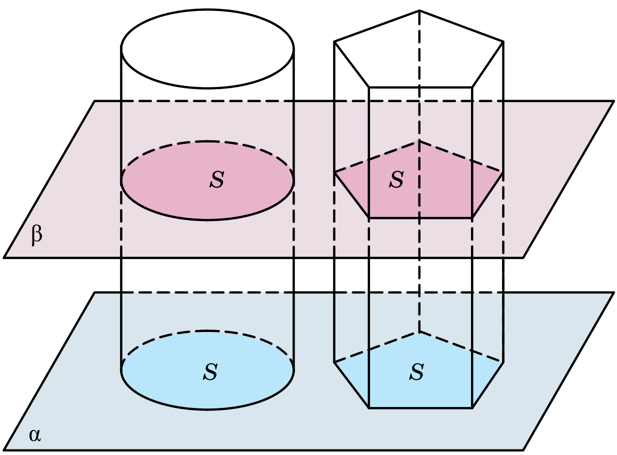
§ 10. ОБ'ЄМИ ТІЛ ОБЕРТАННЯ

1. Об'єм циліндра

У цьому пункті розглянемо питання об'єму циліндра.

Т Теорема (про об'єм циліндра). **Об'єм циліндра дорівнює добутку площі його основи на висоту.**

Доведення. 1) Розмістимо циліндр із площею основи S і висотою h на площину α поряд із призмою, яка має також площу основи S і висоту h (мал. 10.1).



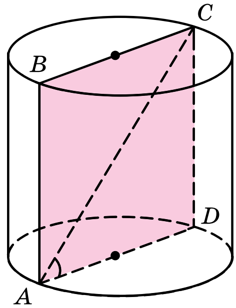
Мал. 10.1

2) Оскільки висоти циліндра і призми рівні між собою, то кожна площина β, яка паралельна площині α, що перетинає циліндр, перетинає також і призму.
3) Усі відповідні площі перерізів циліндра і призми рівні, оскільки кожна з них дорівнює S.
4) Розглядувані тіла задовольняють усі умови принципу Кавальєрі. Тому об'єм циліндра дорівнює об'єму призми і дорівнює Sh. ■

Н Наслідок. **Якщо радіус циліндра дорівнює r, а висота – h, то об'єм циліндра $V = \pi r^2 h$.**

Розглянемо приклади розв'язування задач.

Задача 1. Осьовий переріз циліндра – прямокутник, діагональ якого дорівнює $4\sqrt{3}$ см і утворює з площиною основи кут $30°$. Знайти об'єм циліндра.

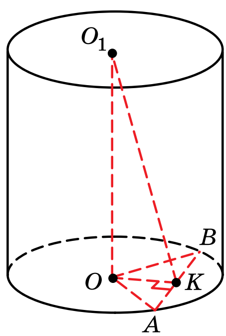


Мал. 10.2

Розв'язання. 1) На малюнку 10.2 зображено заданий в умові циліндр. Прямокутник $ABCD$ – його осьовий переріз, $AC = 4\sqrt{3}$ см, $\angle CAD = 30°$.
2) У $\triangle ACD$ ($\angle D = 90°$):
$CD = AC\sin\angle CAD = 4\sqrt{3}\sin 30° = 2\sqrt{3}$ (см);
$CD = h$ – висота циліндра.
3) У $\triangle ACD$: $AD = AC\cos\angle CAD = 4\sqrt{3}\cos 30° = 6$ (см). Тоді радіус циліндра $r = \dfrac{AD}{2} = \dfrac{6}{2} = 3$ (см).
4) Маємо $V = \pi r^2 h = \pi \cdot 3^2 \cdot 2\sqrt{3} = 18\sqrt{3}\pi$ (см^3).

Відповідь. $18\sqrt{3}\pi$ см^3.

Задача 2. У нижній основі циліндра проведено хорду, яку видно із центра основи під кутом $120°$. Відрізок, що сполучає центр верхньої основи із серединою заданої хорди, дорівнює 10 см і утворює з площиною нижньої основи кут $60°$. Знайти об'єм циліндра.



Мал. 10.3

Розв'язання. 1) На малюнку 10.3 зображено заданий в умові циліндр, $\angle BOA = 120°$, K – середина AB, $O_1K = 10$ см, $\angle O_1KO = 60°$.
2) У $\triangle O_1KO$ ($\angle O = 90°$):
$OO_1 = O_1K\sin\angle O_1KO = 10\sin 60° = 5\sqrt{3}$ (см),
$O_1O = h$.

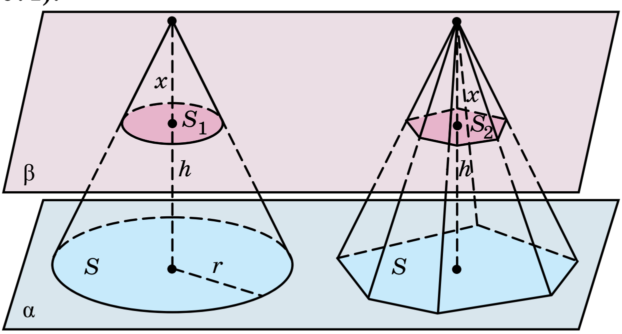
3) У $\triangle O_1KO$: $OK = O_1K\cos\angle O_1KO = 10\cos 60° = 5$ (см).
4) Оскільки K – середина AB і $\triangle AOB$ – рівнобедрений ($OA = OB$), то OK – медіана, бісектриса і висота $\triangle AOB$: $\angle OKA = 90°$, $\angle AOK = \dfrac{120°}{2} = 60°$.
5) У $\triangle OKA$ ($\angle K = 90°$): $OA = \dfrac{OK}{\cos\angle AOK} = \dfrac{5}{\cos 60°} = 10$ (см).
Отже, $r = 10$ см.
6) Об'єм циліндра $V = \pi r^2 h = \pi \cdot 10^2 \cdot 5\sqrt{3} = 500\sqrt{3}\pi$ (см^3).
Відповідь. $500\sqrt{3}\pi$ см^3.

2. Об'єм конуса

Розглянемо питання знаходження об'єму конуса.

Т Теорема 1 (про об'єм конуса). **Об'єм конуса дорівнює третині добутку площі його основи на висоту.**

Доведення. 1) Нехай задано конус із площею основи S і висотою h. Розмістимо цей конус і піраміду, у якої площа основи також дорівнює S, а висота – h, на деякій площині α (мал. 10.4).



Мал. 10.4

2) Оскільки висоти конуса і піраміди рівні, то кожна площина β, паралельна площині α, яка перетинає конус, перетинатиме і піраміду. Проведемо площину β на відстані x від вершини конуса.
3) Нехай у перерізі конуса отримали круг із площею S_1, а в перерізі піраміди – многокутник із площею S_2. Міркуючи аналогічно міркуванням, які наведено в темі про рівновеликість трикутних пірамід з рівними висотами і рівновеликими основами, матимемо:

$$\frac{S_1}{S} = \left(\frac{x}{h}\right)^2 \text{ і } \frac{S_2}{S} = \left(\frac{x}{h}\right)^2.$$

Звідси $S_1 = S_2$.

4) Застосовуючи принцип Кавальєрі, матимемо рівновеликість заданих конуса і піраміди.

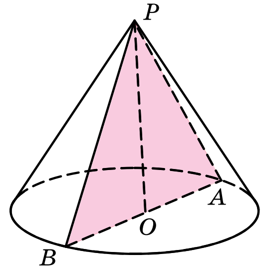
Тому об’єм конуса дорівнює $\frac{1}{3}Sh$. ■

Н Наслідок. **Якщо радіус основи конуса дорівнює r, а висота – h, то об’єм конуса**

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h.$$

Розглянемо приклади знаходження об’єму конуса.

Задача 3. Знайти об’єм конуса, якщо його осьовим перерізом є правильний трикутник зі стороною 6 см.



Мал. 10.5

Розв’язання. 1) Нехай $\triangle PAB$ – осьовий переріз конуса, $PA = PB = AB = 6$ см (мал. 10.5).

2) Тоді радіус основи $r = \frac{AB}{2} = 3$ (см).

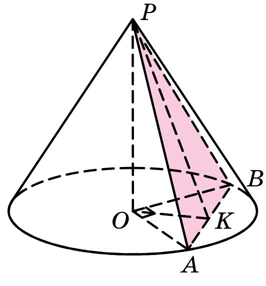
3) У $\triangle POA$ ($\angle O = 90^\circ$):

$h = PO = \sqrt{AP^2 - OA^2} = \sqrt{6^2 - 3^2} = 3\sqrt{3}$ (см).

4) Об’єм конуса $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi \cdot 3^2 \cdot 3\sqrt{3} = 9\sqrt{3}\pi$ (см^3).

Відповідь. $9\sqrt{3}\pi$ см^3.

Задача 4. Через вершину конуса проведено площину, яка перетинає основу по хорді завдовжки 8 см, яку видно з центра основи під прямим кутом. Знайти об’єм конуса, якщо площа перерізу дорівнює 20 см^2.



Мал. 10.6

Розв’язання. 1) На малюнку 10.6 зображено конус, у якому проведено переріз PAB, $AB = 8$ см, $\angle AOB = 90^\circ$, площа перерізу $S_п = 20$ см^2.

2) Позначимо $OA = OB = r$, тоді у $\triangle OAB$ ($\angle O = 90^\circ$): $r^2 + r^2 = 8^2$, $r = 4\sqrt{2}$ (см).

3) Нехай PK – висота $\triangle PAB$, тоді $S_п = \frac{1}{2}AB \cdot PK$;

$PK = \frac{2S_п}{AB} = \frac{2 \cdot 20}{8} = 5$ (см).

4) Оскільки $PK \perp AB$, то за теоремою про три перпендикуляри $OK \perp AB$. Оскільки $\triangle OAB$ – рівнобедрений ($OA = OB$),

то OK не тільки висота $\triangle OAB$, а й медіана. Тому $OK = \frac{AB}{2} = \frac{8}{2} = 4$ (см) (за властивістю медіани, проведеної до гіпотенузи).

5) У $\triangle OPK$ ($\angle O = 90°$): $h = OP = \sqrt{PK^2 - OK^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3$ (см).

6) Отже, об'єм конуса $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi \cdot \left(4\sqrt{2}\right)^2 \cdot 3 = 32\pi$ (см^3).

Відповідь. 32π см^3.

3. Об'єм кулі

У курсі математичного аналізу вивчається формула для обчислення об'єму тіла за площинами його паралельних перерізів. На основі цієї формули можна довести формулу для обчислення об'єму кулі.

Теорема (про об'єм кулі). **Об'єм кулі V, радіус якої дорівнює r, обчислюється за формулою**

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3.$$

Доведення згаданої теореми та теореми про об'єм кулі є досить громіздкими, тому в цьому підручнику не наводяться.

Розглянемо задачі.

Задача 5. Потрібно переплавити в одну кулю дві чавунні кулі радіусами 5 см і 7 см. Знайти (з точністю до десятих сантиметра) радіус нової кулі.

Розв'язання. 1) Об'єми початкових куль:

$$V_1 = \frac{4}{3}\pi r_1^3 = \frac{4}{3}\pi \cdot 5^3 \text{ і } V_2 = \frac{4}{3}\pi r_2^3 = \frac{4}{3}\pi \cdot 7^3.$$

2) Об'єм отриманої кулі:

$$V = V_1 + V_2 = \frac{4}{3}\pi \cdot 5^3 + \frac{4}{3}\pi \cdot 7^3 = \frac{4}{3}\pi \cdot 468.$$

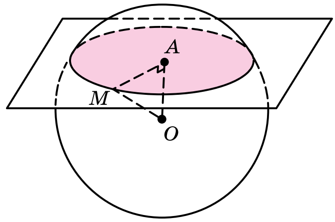
3) З другого боку, за відомою формулою $V = \frac{4}{3}\pi r^3$, маємо:

$$\frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi \cdot 468;\ r^3 = 468;\ r = \sqrt[3]{468} \approx 7{,}8 \text{ см}.$$

Відповідь. $\approx 7{,}8$ см.

Задача 6. На відстані 3 см від центра кулі проведено переріз, площа якого дорівнює 27π см^2. Знайти об'єм кулі.

Розв'язання. 1) На малюнку 10.7 зображено кулю із центром у точці O, яку перетнуто площиною. У перерізі отримали круг із центром у точці A, $OA = 3$ см.



Мал. 10.7

2) Площа перерізу $S_п = \pi \cdot AM^2$. З іншого боку, за умовою задачі $S_п = 27\pi$ см^2. Маємо $\pi \cdot AM^2 = \pi \cdot 27$; $AM^2 = 27$ (см^2).

3) У $\triangle AOM$ ($\angle A = 90°$, $OM = r$ – радіус кулі) маємо:

$$OM = \sqrt{AO^2 + AM^2} = \sqrt{3^2 + 27} = 6 \text{ (см)}.$$

4) Об'єм кулі $V = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi \cdot 6^3 = 288\pi$ (см^3).

Відповідь. 288π см^3.

А ще раніше...

У «Началах» Евкліда ми знаходимо лише означення об'ємів циліндра і конуса, обчислювати ж об'єми цих тіл Евклід не вмів.

Демокріт з Абдери вмів обчислювати об'єм конуса (мабуть, одночасно із встановленням об'єму піраміди), проте строге доведення формули для обчислення об'єму конуса належить Евдоксу Кнідському. Він довів, що об'єм конуса дорівнює третині об'єму циліндра, що має таку саму основу і висоту.

Також Евдокс довів, що відношення об'ємів конусів (чи циліндрів) з рівними висотами дорівнює відношенню площ їх основ, а також те, що відношення об'ємів двох конусів (чи циліндрів), площі основ яких рівні, дорівнює відношенню висот.

Першим формулу для обчислення об'єму кулі та «механічне» доведення її у своєму трактаті «Про кулю і циліндр» наводить Архімед.

● Сформулюйте й доведіть теорему про об'єм циліндра. ● Сформулюйте наслідок із цієї теореми. ● Сформулюйте й доведіть теорему про об'єм конуса. ● Сформулюйте наслідок із цієї теореми. ● За якою формулою знаходять об'єм кулі?

Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

1

10.1. Знайдіть об'єм циліндра, у якого площа основи дорівнює 20 см^2, а висота – 3 см.

10.2. Висота циліндра дорівнює 7 см, а площа основи – 10 см^2. Знайдіть об'єм циліндра.

10.3. Об'єм циліндра дорівнює 50 см^3, а висота – 10 см. Знайдіть площу основи.

10.4. Площа основи циліндра дорівнює 25 см^2, а його об'єм – 100 см^3. Знайдіть висоту циліндра.

10.5. Знайдіть об'єм циліндра, у якого радіус основи дорівнює 3 см, а висота – 7 см.

10.6. Висота циліндра дорівнює 8 см, а радіус основи – 2 см. Знайдіть об'єм циліндра.

10.7. Знайдіть об'єм конуса, у якого площа основи дорівнює 12 см^2, а висота – 5 см.

10.8. Висота конуса дорівнює 6 см, а площа основи – 13 см^2. Знайдіть об'єм конуса.

10.9. Висота конуса дорівнює 12 см, а його об'єм – 20 см^3. Знайдіть площу основи.

10.10. Об'єм конуса дорівнює 40 см^3, а площа його основи – 20 см^2. Знайдіть висоту конуса.

10.11. Знайдіть об'єм конуса, у якого радіус основи дорівнює 2 см, а висота – 3 см.

10.12. Знайдіть об'єм конуса, висота якого дорівнює 5 см, а радіус основи – 3 см.

10.13. Знайдіть об'єм кулі:

1) радіус якої дорівнює 4 см;
2) діаметр якої дорівнює 6 дм.

10.14. Знайдіть об'єм кулі:

1) радіус якої дорівнює 9 см;
2) діаметр якої дорівнює 4 дм.

2 **10.15.** Осьовим перерізом циліндра є прямокутник, площа якого 40 см^2. Радіус основи циліндра дорівнює 5 см. Знайдіть об'єм циліндра.

10.16. Висота циліндра дорівнює 6 см, а площа осьового перерізу циліндра – 24 см^2. Знайдіть об'єм циліндра.

10.17. Об'єм циліндра дорівнює 45π см^3, а його висота – 5 см. Знайдіть радіус основи циліндра.

10.18. Об'єм циліндра дорівнює 48π см^3, а діаметр його основи – 8 см. Знайдіть висоту циліндра.

10.19. Діагональ осьового перерізу циліндра дорівнює 17 см, а висота – 15 см. Знайдіть об'єм циліндра.

10.20. Радіус основи циліндра дорівнює 3 см, а діагональ осьового перерізу – 10 см. Знайдіть об'єм циліндра.

10.21. Діагоналі осьового перерізу циліндра взаємно перпендикулярні, а периметр осьового перерізу дорівнює 16 см. Знайдіть об'єм циліндра.

10.22. Осьовий переріз циліндра – прямокутник, діагональ якого дорівнює 8 см і утворює з площиною основи кут 60°. Знайдіть об'єм циліндра.

10.23. Висота циліндра вдвічі більша за радіус основи, а відрізок, що сполучає центр верхньої основи з точкою кола нижньої основи, дорівнює $3\sqrt{5}$ см. Знайдіть об’єм циліндра.

10.24. Радіус основи циліндра втричі більший за його висоту, а відрізок, що сполучає центр верхньої основи з точкою кола нижньої, дорівнює $2\sqrt{10}$ см. Знайдіть об’єм циліндра.

10.25. У циліндричну посудину, у якій 12 $м^3$ води, опустили деталь. При цьому рівень води в посудині піднявся в 1,5 раза. Знайдіть об’єм деталі.

10.26. У циліндричну посудину, внутрішній діаметр якої 40 см, опустили деталь. При цьому рівень води в посудині піднявся на 10 см. Знайдіть об’єм деталі з точністю до цілих кубічних сантиметрів.

10.27. Автоцистерна для перевезення молока має форму циліндра. Внутрішній діаметр циліндра дорівнює 1,8 м, а довжина – 3,5 м. Скільки тонн молока можна налити в таку цистерну, якщо заповнити її повністю (густина молока 1032 кг/$м^3$)?

10.28. Підземне бензосховище має форму циліндра, внутрішній діаметр якого 2,4 м, а довжина – 8 м. Скільки тонн бензину може вмістити таке бензосховище (густина бензину 720 кг/$м^3$)?

10.29. Твірна конуса дорівнює 13 см, а радіус основи – 5 см. Знайдіть об’єм конуса.

10.30. Радіус основи конуса дорівнює 6 см, а твірна – 10 см. Знайдіть об’єм конуса.

10.31. Твірна конуса дорівнює $6\sqrt{2}$ см і утворює з висотою кут $45°$. Знайдіть об’єм конуса.

10.32. Радіус основи конуса дорівнює 3 см і утворює з твірною кут $60°$. Знайдіть об’єм конуса.

10.33. Осьовий переріз конуса – рівнобедрений трикутник з кутом $120°$ при вершині та основою 12 см. Знайдіть об’єм конуса.

10.34. Осьовий переріз конуса – правильний трикутник, висота якого дорівнює $\sqrt{3}$ см. Знайдіть об’єм конуса.

10.35. Площа основи конуса дорівнює 9π $см^2$, а його твірна – 5 см. Знайдіть об’єм конуса.

10.36. Довжина кола основи конуса дорівнює 14π см, а його твірна – 25 см. Знайдіть об’єм конуса.

10.37. Воду, що заповнювала всю колбу, яка мала форму конуса з висотою 15 см, перелили в циліндричну посудину, радіус основи якої дорівнює радіусу основи конуса. На якій висоті буде вода в циліндричній посудині?

10.38. Свинцевий циліндр, висота якого 12 см, переплавили в конус з такою самою основою. Знайдіть висоту цього конуса.

10.39. Площа великого круга кулі дорівнює 16π см^2. Знайдіть об'єм кулі.

10.40. Довжина великого кола кулі дорівнює 12π см. Знайдіть об'єм кулі.

10.41. У кулі на відстані 5 см від центра проведено січну площину так, що в перерізі утворився круг, довжина кола якого дорівнює 24π см. Знайдіть об'єм кулі.

10.42. Перерізом кулі площиною на відстані 4 см від центра є круг із площею 9π см^2. Знайдіть об'єм кулі.

10.43. Свинцеву кулю переплавили в кульки, радіус яких в 4 рази менший. Скільки таких кульок отримали?

10.44. Є свинцеві кульки однакового радіуса. Скільки таких кульок треба взяти, щоб з них відлити одну кулю, радіус якої у 5 разів більший за радіус даних кульок?

10.45. Зовнішній радіус дюралюмінієвої порожнистої кулі дорівнює 10 см, товщина стінок – 1 см. Знайдіть:
1) об'єм дюралюмінію, з якого виготовили кулю;
2) масу кулі (густина дюралюмінію 2,8 г/см^3) з точністю до грамів.

10.46. Внутрішній радіус порожнистої чавунної кулі дорівнює 7 см, а її зовнішній радіус – 9 см. Знайдіть:
1) об'єм чавуну, з якого виготовлено кулю;
2) масу чавуну (густина чавуну 7,3 г/см^3) з точністю до грамів.

10.47. Об'єм кулі дорівнює $\dfrac{500\pi}{3}$ см^3. Знайдіть діаметр кулі.

10.48. Об'єм кулі дорівнює $\dfrac{256\pi}{3}$ см^3. Знайдіть радіус кулі.

3

10.49. Хорда основи циліндра дорівнює 6 см і віддалена від центра цієї основи на 4 см. Відрізок, що сполучає центр іншої основи із серединою хорди, утворює з площиною основи кут 60°. Знайдіть об'єм циліндра.

10.50. Хорда основи циліндра дорівнює 8 см і віддалена від центра цієї основи на 3 см. Відрізок, що сполучає центр іншої основи циліндра з кінцем даної хорди, утворює з площиною основи кут 45°. Знайдіть об'єм циліндра.

10.51. У циліндричній посудині рівень води перебуває на висоті 36 см. На якій висоті перебуватиме рівень води, якщо її перелити в циліндричну посудину:

1) радіус якої у 3 рази більший за радіус першої;
2) діаметр якої у 2 рази менший ніж діаметр першої?

10.52. Об'єми двох циліндрів рівні. Радіус першого циліндра в 4 рази більший за радіус другого. У скільки разів висота першого циліндра менша ніж висота другого?

10.53. Діагональ осьового перерізу циліндра дорівнює 25 см, а його висота на 5 см менша ніж радіус. Знайдіть об'єм циліндра.

10.54. Діагональ осьового перерізу циліндра на 7 см більша за радіус циліндра, а його висота дорівнює 5 см. Знайдіть об'єм циліндра.

10.55. Діагональ перерізу циліндра, який паралельний його осі, дорівнює $8\sqrt{3}$ см і утворює з площиною основи кут $60°$. Переріз відтинає від кола основи дугу $120°$. Знайдіть об'єм циліндра.

10.56. Діагональ перерізу циліндра, який паралельний його осі, дорівнює 6 см і утворює з площиною основи кут $45°$. Переріз відтинає від кола основи дугу $90°$. Знайдіть об'єм циліндра.

10.57. Відрізок, що сполучає центр верхньої основи циліндра з точкою кола нижньої, утворює з віссю циліндра кут β. Відстань від центра нижньої основи до даного відрізка дорівнює m. Знайдіть об'єм циліндра.

10.58. Відрізок, що сполучає центр верхньої основи циліндра з точкою кола нижньої, утворює з площиною основи кут α. Відрізок, що сполучає центр нижньої основи і середину даного відрізка, дорівнює l. Знайдіть об'єм циліндра.

10.59. Висота конуса дорівнює 24 см, а сума твірної і радіуса основи дорівнює 32 см. Знайдіть об'єм конуса.

10.60. Радіус основи конуса дорівнює 6 см, а твірна на 4 см більша за висоту. Знайдіть об'єм конуса.

10.61. Через вершину конуса проведено площину під кутом $45°$ до площини основи. Ця площина перетинає основу по хорді завдовжки $6\sqrt{3}$ см, яку видно із центра основи під кутом $120°$. Знайдіть об'єм конуса.

10.62. Через дві твірні конуса проведено площину під кутом $60°$ до площини основи. Ця площина перетинає основу по хорді, яку видно із центра основи під прямим кутом. Знайдіть об'єм конуса, якщо його висота дорівнює 6 см.

10.63. Твірна конуса утворює з його висотою кут α. Знайдіть об'єм конуса, якщо відстань від центра основи до твірної конуса дорівнює d.

10.64. Твірна конуса утворює з площиною основи кут β. Знайдіть об'єм конуса, якщо відстань від центра основи до середини твірної дорівнює m.

10.65. Три кулі, радіуси яких 1 дм, 2 дм і 3 дм, переплавили в одну. Знайдіть її радіус.

10.66. Дві кулі, радіуси яких 4 см і 5 см, переплавили в одну. Знайдіть її радіус.

10.67. Чавунний прямокутний паралелепіпед з лінійними розмірами 3 см, 4 см і 6 см переплавили в кулю. Знайдіть її радіус (з точністю до десятих сантиметра).

10.68. Латунний куб з ребром 7 см переплавили в кулю. Знайдіть її радіус (з точністю до десятих сантиметра).

10.69. У кулі, об'єм якої дорівнює 288π см^3, проведено переріз. Відрізок, що сполучає центр кулі з точкою кола даного перерізу, утворює з площиною перерізу кут $45°$. Знайдіть площу перерізу.

10.70. Об'єм кулі дорівнює $\dfrac{2048}{3}\pi$ см^3. Перпендикуляр, проведений із центра кулі до площини перерізу кулі, утворює кут $30°$ з радіусом, проведеним у точку кола перерізу. Знайдіть площу перерізу.

4 **10.71.** У циліндрі паралельно осі проведено переріз, що перетинає основу по хорді, яку видно із центра цієї основи під прямим кутом. Площа перерізу, що утворився, $18\sqrt{3}$ см^2, а кут нахилу діагоналі перерізу до площини основи дорівнює $60°$. Знайдіть об'єм циліндра.

10.72. У циліндрі паралельно осі проведено площину, що перетинає основу по хорді, яку видно із центра цієї основи під кутом $60°$. Площа перерізу, що утворився, $12\sqrt{3}$ см^2, а кут між діагоналлю перерізу і твірною циліндра дорівнює $60°$. Знайдіть об'єм циліндра.

10.73. Переріз, паралельний осі циліндра, перетинає його основу по хорді, яка дорівнює b і стягує дугу β. Діагональ перерізу утворює з твірною кут α. Знайдіть об'єм циліндра.

10.74. Паралельно осі циліндра проведено площину, яка перетинає основу циліндра по хорді, що стягує дугу γ. Діагональ перерізу дорівнює d і нахилена до площини основи під кутом α. Знайдіть об'єм циліндра.

10.75. Периметр осьового перерізу циліндра $2p$. Діагональ перерізу утворює з площиною основи кут α. Знайдіть об'єм циліндра.

10.76. Площа осьового перерізу циліндра дорівнює Q. Діагональ перерізу утворює з твірною кут β. Знайдіть об'єм циліндра.

10.77. Прямокутний трикутник з катетами 6 см і 8 см обертається навколо гіпотенузи. Знайдіть об'єм тіла обертання.

10.78. Правильний трикутник зі стороною 6 см обертається навколо однієї із сторін. Знайдіть об'єм тіла обертання.

10.79. Знайдіть об'єм конуса, твірна якого утворює з висотою кут α, а периметр осьового перерізу дорівнює $2p$.

10.80. Знайдіть об'єм конуса, твірна якого утворює з площиною основи кут γ, а периметр осьового перерізу конуса дорівнює $2p$.

10.81. Діаметр циліндра дорівнює його висоті. Чи поміститься в цьому циліндрі куля, об'єм якої удвічі менший ніж об'єм циліндра?

10.82. Сторони трикутника дорівнюють 13 см, 14 см і 15 см. Куля, об'єм якої дорівнює $\frac{500}{3}\pi$ см^3, дотикається до всіх сторін цього трикутника. Знайдіть відстань від центра кулі до площини трикутника.

10.83. Вершини правильного трикутника зі стороною 6 см належать кулі, об'єм якої дорівнює $\frac{256}{3}\pi$ см^3. Знайдіть відстань від центра кулі до площини трикутника.

Життєва математика

10.84. Ретрансляційна вишка спирається на фундамент у формі кільця. Діаметр зовнішнього кола дорівнює 28 м, а внутрішнього – 12 м. Обчисліть площу фундаменту вишки з точністю до десятих квадратних метрів.

10.85. Учителька біології Марина Олегівна замовила акваріум, який має форму правильної шестикутної призми. Скільки квадратних метрів скла потрібно для виготовлення акваріума, якщо сторона основи 0,5 м, а висота 1,2 м? (Відповідь округліть до сотих.)

Перевірте свою компетентність! Завдання № 10

1. У трикутнику ABC $AC = 6$ см, $\angle ABC = 60°$. Знайдіть радіус кола, описаного навколо трикутника.

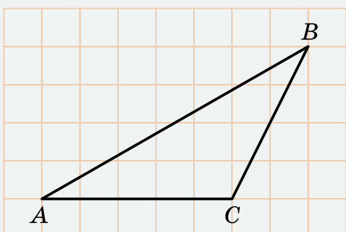
А	Б	В	Г	Д
$2\sqrt{3}$ см	$3\sqrt{2}$ см	6 см	$4\sqrt{3}$ см	12 см

2. Дано вектор $\vec{a}(-8; 6)$. Знайдіть довжину вектора $-\frac{2}{5}\vec{a}$.

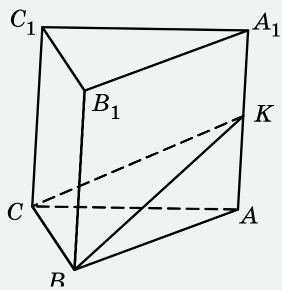
А	Б	В	Г	Д
$\frac{2}{5}$	2	4	6	10

3. На папері у клітинку зображено трикутник ABC, вершини якого збігаються з вершинами клітинок (мал. 1). Знайдіть площу трикутника ABC, якщо клітинка є квадратом зі стороною 1 см.

А	Б	В	Г	Д
25 см^2	20 см^2	15 см^2	10 см^2	8 см^2



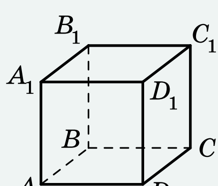
Мал. 1



Мал. 2

4. Точка K – середина ребра AA_1 прямої трикутної призми $ABCA_1B_1C_1$ (мал. 2). Знайдіть об'єм цієї призми, якщо об'єм піраміди $KABC$ дорівнює 10 см^3.

А	Б	В	Г	Д
20 см^3	30 см^3	60 см^3	120 см^3	180 см^3



Мал. 3

5. На малюнку 3 зображено куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Установіть відповідність між парою прямих (1–4) та їх взаємним розміщенням (А–Д).

Пара прямих		*Взаємне розміщення*	
1	AB_1 і AB	**А**	прямі паралельні
2	A_1D і DC_1	**Б**	прямі мимобіжні
3	A_1B і D_1C	**В**	прямі перетинаються та утворюють кут 45°
4	A_1B і DC_1	**Г**	прямі перетинаються та утворюють кут 60°
		Д	прямі перетинаються під прямим кутом

	А	**Б**	**В**	**Г**	**Д**
1					
2					
3					
4					

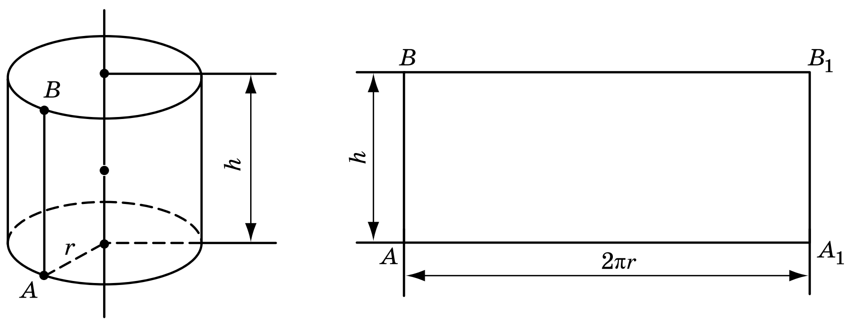
6. Висота правильної чотирикутної піраміди дорівнює 6 см, а бічна грань нахилена до площини основи під кутом 60°. Знайдіть площу повної поверхні піраміди (у см^2).

§ 11. ПЛОЩІ ПОВЕРХОНЬ ТІЛ ОБЕРТАННЯ

У цьому параграфі розглянемо питання знаходження площ поверхонь тіл обертання.

1. Площа поверхні циліндра

Спочатку розглянемо питання знаходження *бічної поверхні циліндра*. На малюнку 11.1 зображено циліндр. Якщо поверхню циліндра розрізати по твірній AB та по колах основ і розгорнути так, що всі твірні циліндра будуть належати деякій площині, то отримаємо *розгортку бічної поверхні циліндра*. За площу бічної поверхні циліндра приймають площу її розгортки. Розгорткою бічної поверхні є прямокутник ABB_1A_1, одна сторона якого дорівнює висоті циліндра h, а інша – довжині кола основи, тобто $2\pi r$. Таким чином, площа розгортки бічної поверхні циліндра дорівнює $AA_1 \cdot AB = 2\pi rh$. Отже,



Мал. 11.1

площа бічної поверхні циліндра $S_{бічн}$, радіус основи якого дорівнює r, а висота – h, обчислюється за формулою

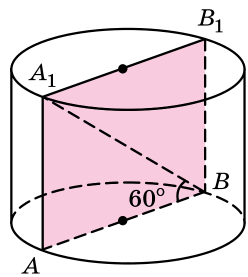
$$S_{бічн} = 2\pi rh.$$

Для того щоб знайти *площу повної поверхні циліндра* $S_{повн}$, потрібно до площі його бічної поверхні додати площі двох його основ. Оскільки основою є круг, площа якого дорівнює πr^2, то маємо

$$S_{повн} = 2\pi rh + 2\pi r^2 = 2\pi r(r + h).$$

Задача 1. Діагональ осьового перерізу циліндра дорівнює 8 см і утворює з площиною основи кут 60°. Знайти площу бічної поверхні циліндра.

Розв'язання. 1) На малюнку 11.2 зображено осьовий переріз циліндра – прямокутник ABB_1A_1, діагональ якого $A_1B = 8$ см, $\angle A_1BA = 60°$.



Мал. 11.2

2) У $\triangle A_1AB$ ($\angle A = 90°$):

$AA_1 = A_1B\sin\angle A_1BA = 8\sin 60° = 8 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}$ (см).

$AB = A_1B\cos\angle A_1BA = 8\cos 60° = 8 \cdot \frac{1}{2} = 4$ (см).

3) Отже, висота циліндра $h = 4\sqrt{3}$ см, а радіус основи $r = \frac{AB}{2} = \frac{4}{2} = 2$ (см).

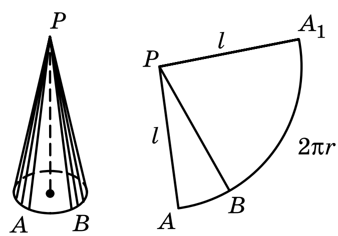
4) Таким чином, площа бічної поверхні циліндра $S_{бічн} = 2\pi rh = 2\pi \cdot 2 \cdot 4\sqrt{3} = 16\sqrt{3}\pi$ (см²).

Відповідь. $16\sqrt{3}\pi$ см².

2. Площа поверхні конуса

Розрізавши *бічну поверхню конуса* по одній з твірних, отримаємо *розгортку цієї бічної поверхні* (мал. 11.3).

За площу бічної поверхні конуса приймають площу її розгортки. Розгорткою бічної поверхні конуса є сектор, у якого радіус дорівнює l, а довжина дуги – $2\pi r$. Площа бічної поверхні конуса $S_{бічн}$ у стільки разів менша за площу круга радіуса l, у скільки разів дуга $2\pi r$ менша



Мал. 11.3

за довжину кола радіуса l, тобто за $2\pi l$. Маємо $\frac{S_{\text{бічн}}}{\pi l^2} = \frac{2\pi r}{2\pi l}$. Звідси $S_{\text{бічн}} = \pi rl$.

Отже,

площа бічної поверхні конуса $S_{\text{бічн}}$, радіус основи якого дорівнює r, а твірна – l, обчислюється за формулою

$$S_{\text{бічн}} = \pi rl.$$

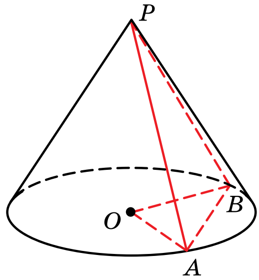
Для того щоб знайти *площу повної поверхні конуса* $S_{\text{повн}}$, потрібно до площі його бічної поверхні додати площу основи. Основою конуса є круг радіуса r, тому

$$S_{\text{повн}} = \pi rl + \pi r^2 = \pi r(r + l).$$

Задача 2. Хорду, що лежить в основі конуса, видно з його вершини під кутом 60°, а із центра основи – під прямим кутом. Знайти площу бічної поверхні конуса, якщо його твірна дорівнює 6 см.

Розв'язання. 1) На малюнку 11.4 зображено конус, де AB – хорда основи, $\angle APB = 60°$, $\angle AOB = 90°$, $PA = PB = l = 6$ см.

2) У $\triangle APB$ ($AP = PB$, $\angle P = 60°$): $\angle PAB = \angle PBA = \frac{180° - 60°}{2} = 60°$, тому $\triangle APB$ – рівносторонній, $AB = 6$ см.



Мал. 11.4

3) У $\triangle AOB$ ($\angle AOB = 90°$): $r^2 + r^2 = 6^2$; $r = 3\sqrt{2}$ (см).

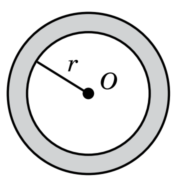
4) Тоді $S_{\text{бічн}} = \pi rl = \pi \cdot 3\sqrt{2} \cdot 6 = 18\sqrt{2}\pi$ (см²).

Відповідь. $18\sqrt{2}\pi$ см².

3. Площа сфери

На відміну від бічної поверхні циліндра або конуса, сферу не можна розгорнути на площині, і тому для знаходження площі сфери застосуємо інший прийом.

Розглянемо сферу радіуса r (мал. 11.5). Шар товщини x для неї – це тіло, що міститься між двома сферами з одним і тим самим центром O та радіусами r і $r + x$. Для площі поверхні кулі приймають таке означення: *площею поверхні кулі* називають границю об'єму шару товщини x до цієї товщини, якщо товщина x прямує до



Мал. 11.5

нуля, тобто поверхня кулі $S = \lim\limits_{x \to 0} \frac{V'}{x}$, де V' – об'єм шару товщини x.

Знайдемо V' як різницю об'ємів двох куль:

$$V' = \frac{4}{3}\pi(r+x)^3 - \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi(r^3 + 3r^2x + 3rx^2 + x^3 - r^3) =$$
$$= \frac{4}{3}\pi(3r^2x + 3rx^2 + x^3) = \frac{4}{3}\pi x(3r^2 + 3rx + x^2).$$

Тоді

$$S = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{4}{3}\pi x(3r^2 + 3rx + x^2)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{4}{3}\pi(3r^2 + 3rx + x^2) =$$
$$= \frac{4}{3}\pi \cdot 3r^2 = 4\pi r^2.$$

Отже,

площа сфери радіуса r обчислюється за формулою
$S = 4\pi r^2$.

Задача 3. Скільки фарби треба, щоб пофарбувати 20 куль, якщо радіус кожної дорівнює 5 см і на 1 м^2 витрачають 180 г фарби? (Відповідь округліть до цілих грамів.)

Розв'язання. 1) Площа поверхні однієї кулі

$$S = 4\pi r^2 = 4\pi \cdot 5^2 = 100\pi \text{ (см}^2\text{)}.$$

2) Площа поверхонь 20 куль дорівнює

$$S_1 = 20 \cdot 100\pi = 2000\pi \text{ (см}^2\text{)}.$$

Оскільки 1 м^2 = 10 000 см^2, то $S_1 = \frac{2000\pi}{10\,000} = 0{,}2\pi$ (м^2).

3) Тоді маса фарби m, яка потрібна для фарбування цих куль, $m = 0{,}2\pi \cdot 180 \approx 113$ (г).

Відповідь. ≈ 113 г.

А ще раніше...

У «Началах» Евкліда нічого не говориться про площу бічної поверхні циліндра. Формулу для її обчислення знайшов Архімед, який у своїй роботі «Про кулю і циліндр» наводить доведення формули, яку після перетворень можна записати $S = 2\pi rh$.

У цій самій роботі Архімед також наводить формулу для обчислення площі бічної поверхні конуса, яку в сучасних символах можна записати $S = \pi rl$, та строго доводить формулу для обчислення площі поверхні сфери.

● За якою формулою обчислюють площу бічної поверхні циліндра, а за якою – площу повної поверхні циліндра? ● За якою формулою обчислюють площу бічної поверхні конуса, а за якою – площу повної поверхні конуса? ● За якою формулою обчислюють площу сфери?

Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

1

11.1. Площа бічної поверхні циліндра дорівнює 20π см^2, а площа основи – 16π см^2. Знайдіть площу повної поверхні циліндра.

11.2. Площа основи циліндра дорівнює 4π см^2, а площа бічної поверхні – 16π см^2. Знайдіть площу повної поверхні циліндра.

11.3. Площа повної поверхні конуса дорівнює 18π см^2, а площа основи – 4π см^2. Знайдіть площу бічної поверхні конуса.

11.4. Площа бічної поверхні конуса дорівнює 12π см^2, а площа повної поверхні – 21π см^2. Знайдіть площу основи.

11.5. Знайдіть площі бічної та повної поверхонь циліндра, у якого радіус основи дорівнює 3 см, а висота – 5 см.

11.6. Радіус основи циліндра дорівнює 4 см, а висота – 7 см. Знайдіть площі бічної та повної поверхонь циліндра.

11.7. Радіус основи конуса дорівнює 7 см, а твірна – 9 см. Знайдіть площі бічної та повної поверхонь конуса.

11.8. Знайдіть площі бічної та повної поверхонь конуса, у якого радіус основи дорівнює 2 см, а твірна – 3 см.

11.9. Знайдіть площу поверхні кулі, радіус якої дорівнює:
1) 3 дм; 2) 7 см.

11.10. Знайдіть площу поверхні кулі, радіус якої дорівнює:
1) 4 см; 2) 2 дм.

2

11.11. Діагональ осьового перерізу циліндра дорівнює 8 см і утворює з площиною основи кут 30°. Знайдіть площу бічної поверхні циліндра.

11.12. Осьовим перерізом циліндра є квадрат з діагоналлю $4\sqrt{2}$ см. Знайдіть площу бічної поверхні циліндра.

11.13. Діагональ осьового перерізу циліндра дорівнює 17 см, а висота – 15 см. Знайдіть площу повної поверхні циліндра.

11.14. Діагональ осьового перерізу циліндра дорівнює 13 см, а радіус основи – 6 см. Знайдіть площу повної поверхні циліндра.

11.15. Бічна поверхня циліндра дорівнює 24π см^2, а висота – 4 см. Знайдіть об'єм циліндра.

11.16. Бічна поверхня циліндра дорівнює 40π см^2, а радіус основи – 4 см. Знайдіть об'єм циліндра.

11.17. Твірна конуса дорівнює 4 см і утворює з площиною основи кут 45°. Знайдіть площу бічної поверхні конуса.

11.18. Радіус основи конуса дорівнює 5 см і утворює з твірною кут 60°. Знайдіть площу бічної поверхні конуса.

11.19. Прямокутний трикутник з гіпотенузою 10 см і катетом 6 см обертається навколо цього катета. Знайдіть площу повної поверхні утвореного конуса.

11.20. Прямокутний трикутник з катетами 7 см і 24 см обертається навколо більшого катета. Знайдіть площу повної поверхні утвореного конуса.

11.21. Осьовим перерізом конуса є прямокутний трикутник з гіпотенузою $6\sqrt{2}$ см. Знайдіть площу бічної поверхні конуса.

11.22. Осьовим перерізом конуса є рівносторонній трикутник з висотою $2\sqrt{3}$ см. Знайдіть площу бічної поверхні конуса.

11.23. У скільки разів збільшиться площа поверхні сфери, якщо її радіус збільшити у 3 рази?

11.24. У скільки разів зменшиться площа поверхні сфери, якщо її радіус зменшити у 2 рази?

11.25. У якому випадку витрачається більше фарби: на фарбування однієї кулі діаметра 60 дм чи на фарбування 8 куль діаметра 2 дм, якщо матеріал усіх куль однаковий?

11.26. Діаметр Сонця в 400 разів більший за діаметр Місяця. У скільки разів площа поверхні Сонця більше за площу поверхні Місяця?

11.27. Об'єм кулі дорівнює 36π см^3. Знайдіть площу поверхні сфери, яка обмежує цю кулю.

11.28. Площа поверхні сфери дорівнює 144π см^2. Знайдіть об'єм кулі, яку обмежує ця сфера.

11.29. На відстані 5 см від центра сфери проведено переріз, що перетинає сферу по колу завдовжки 24π см. Знайдіть площу сфери.

11.30. Переріз кулі має площу 36π см^2 і віддалений від центра на 8 см. Знайдіть площу сфери, що обмежує цю кулю.

3 **11.31.** Хорда, що належить основі циліндра, дорівнює $6\sqrt{3}$ см і стягує дугу 120°. Відрізок, що сполучає один з

кінців хорди із центром іншої основи, утворює з площиною основи кут $45°$. Знайдіть площу повної поверхні циліндра.

11.32. У циліндрі перпендикулярно до радіуса основи через його середину проведено переріз. У перерізі утворився квадрат з діагоналлю $6\sqrt{2}$ см. Знайдіть площу бічної поверхні циліндра.

11.33. Діагональ прямокутника дорівнює d і утворює зі стороною кут α. Знайдіть площу бічної поверхні циліндра, утвореного при обертанні прямокутника навколо осі, що проходить через цю сторону.

11.34. Сторона прямокутника дорівнює a і утворює з діагоналлю кут β. Знайдіть площу повної поверхні циліндра, утвореного при обертанні прямокутника навколо осі, що проходить через іншу сторону.

11.35. Відро циліндричної форми має висоту 5 дм, а діаметр дна 32 см. Скільки квадратних дециметрів листового заліза потрібно для виготовлення такого відра, якщо на шви слід додати 6 % поверхні відра?

11.36. Скільки квадратних метрів жесті піде на виготовлення труби завдовжки 4 м і діаметром 20 см, якщо на шви додають 5 % поверхні труби?

11.37. Висота конуса відноситься до його діаметра як $2 : 3$, а твірна конуса дорівнює 10 см. Знайдіть площу повної поверхні конуса.

11.38. Твірна конуса відноситься до діаметра як $13 : 24$, а висота конуса дорівнює 10 см. Знайдіть площу повної поверхні конуса.

11.39. Хорду, що належить основі конуса, з його вершини видно під кутом $60°$, а із центра основи – під прямим кутом. Знайдіть площу бічної поверхні конуса, якщо його твірна дорівнює l.

11.40. Хорду, що належить основі конуса, з його вершини видно під прямим кутом, а із центра основи – під кутом $120°$. Знайдіть площу бічної поверхні конуса, якщо радіус дорівнює $4\sqrt{3}$ см.

11.41. Доведіть, що повна поверхня конуса, осьовим перерізом якого є рівносторонній трикутник, рівновелика поверхні сфери, побудованої на його висоті як на діаметрі.

11.42. Доведіть, що повна поверхня циліндра, утвореного обертанням квадрата навколо однієї з його сторін, рівновелика поверхні кулі, радіус якої дорівнює стороні квадрата.

11.43. Вершини квадрата зі стороною 4 см належать сфері. Знайдіть площу поверхні сфери, якщо відстань від центра сфери до площини квадрата дорівнює 1 см.

11.44. Вершини рівностороннього трикутника зі стороною 6 см належать сфері. Площина трикутника розташована на відстані 2 см від центра сфери. Знайдіть площу поверхні сфери.

11.45. Площа перерізу циліндра, який проведено паралельно його осі і який відтинає від кола основи дугу $120°$, дорівнює Q. Знайдіть площу бічної поверхні циліндра.

4 **11.46.** Площа перерізу циліндра, який проведено паралельно його осі і який відтинає від кола основи дугу $90°$, дорівнює M. Знайдіть площу бічної поверхні циліндра.

11.47. Бічна поверхня циліндра становить половину його повної поверхні, а діагональ осьового перерізу – $4\sqrt{5}$ см. Знайдіть:

1) площу повної поверхні циліндра;
2) об'єм циліндра.

11.48. Площа бічної поверхні циліндра дорівнює площі основи, а діагональ осьового перерізу – $2\sqrt{17}$ см. Знайдіть:

1) площу повної поверхні циліндра;
2) об'єм циліндра.

11.49. Рівнобедрений трикутник з основою 6 см і бічною стороною 5 см обертається навколо бічної сторони. Знайдіть площу поверхні утвореного тіла обертання.

11.50. Прямокутний трикутник з катетами 3 см і 4 см обертається навколо гіпотенузи. Знайдіть площу поверхні утвореного тіла обертання.

11.51. Кут при вершині в осьовому перерізі конуса дорівнює $120°$. Знайдіть градусну міру центрального кута в розгортці бічної поверхні конуса. (Відповідь округліть до градусів.)

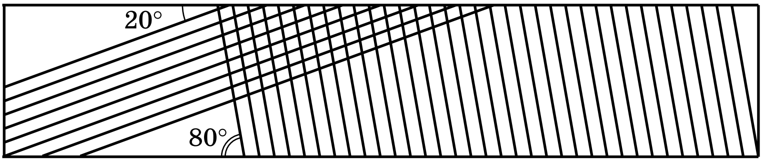
11.52. Кут при вершині в осьовому перерізі конуса дорівнює $90°$. Знайдіть градусну міру центрального кута в розгортці бічної поверхні конуса. (Відповідь округліть до градусів.)

11.53. У кулі по один бік від центра проведено два паралельних перерізи, площі яких дорівнюють 255π см^2 і 576π см^2. Відстань між площинами перерізів дорівнює 13 см. Знайдіть площу поверхні сфери, що обмежує цю кулю.

11.54. У кулі по різні боки від центра проведено два паралельних перерізи, площі яких дорівнюють 225π см^2 і 289π см^2. Відстань між площинами перерізів дорівнює 16 см. Знайдіть площу поверхні сфери, що обмежує цю кулю.

Життєва математика

11.55. Знайдіть кут, утворений лініями насічок у напилка, зображеного на малюнку 11.6.



Мал. 11.6

11.56. Зіниця ока, що має форму круга, може змінювати свій діаметр залежно від освітлення від 1,5 мм до 7,5 мм. У скільки разів при цьому збільшується площа поверхні зіниці?

Перевірте свою компетентність!

Завдання № 11

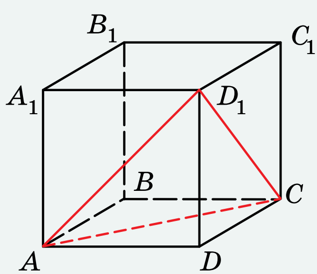
1. Сума градусних мір трьох кутів паралелограма дорівнює 230°. Знайдіть градусну міру меншого кута паралелограма.

А	Б	В	Г	Д
50°	60°	105°	115°	130°

2. Площа круга дорівнює 16π см². Знайдіть довжину кола, що обмежує цей круг.

А	Б	В	Г	Д
4π см	8π см	16π см	32π см	інша відповідь

3. На малюнку зображено куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Знайдіть об'єм цього куба, якщо об'єм піраміди D_1ACD дорівнює V см³.

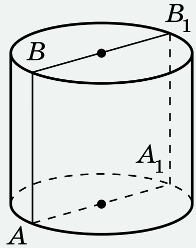


А	$2V$ см³	**Г**	$6V$ см³
Б	$3V$ см³	**Д**	$8V$ см³
В	$4V$ см³		

4. Укажіть точку, відстань від якої до початку координат найбільша.

А	Б	В	Г	Д
(0; 2; 3)	(−1; 1; 5)	(1; −2; 4)	(−2; −3; −4)	(−4; −2; 4)

5. На малюнку зображено циліндр, у якого радіус основи на 1 довший за висоту, а діагональ осьового перерізу дорівнює 13. Установіть відповідність між геометричною величиною (1–4) та її числовим значенням (А–Д).



Геометрична величина	*Числове значення*
1 площа основи циліндра	**А** 36π
2 площа бічної поверхні циліндра	**Б** 180π
3 площа повної поверхні циліндра	**В** 25π
4 об'єм циліндра	**Г** 132π
	Д 60π

	А	Б	В	Г	Д
1					
2					
3					
4					

6. Свинцеву кулю радіуса 1 дм переплавили в 64 кульки однакового розміру. Знайдіть радіуси утворених кульок (у см).

Домашня самостійна робота № 3

Кожне завдання має по чотири варіанти відповіді (А–Г), серед яких лише один є правильним. Оберіть правильний варіант відповіді.

1

1. Знайдіть об'єм прямокутного паралелепіпеда, лінійні виміри якого дорівнюють 4 см, 5 см і 8 см.

А. 184 см^3 **Б.** 140 см^3 **В.** 160 см^3 **Г.** 180 см^3

2. Об'єм піраміди дорівнює 180 см^3, а площа її основи – 60 см^2. Знайдіть висоту піраміди.

А. 3 см **Б.** 6 см **В.** 12 см **Г.** 9 см

3. Твірна конуса дорівнює 6 см, а радіус його основи – 2 см. Знайдіть площу повної поверхні конуса.

А. 4π см^2 **Б.** 12π см^2 **В.** 16π см^2 **Г.** 20π см^2

2

4. Основа прямого паралелепіпеда – ромб зі стороною 2 дм і гострим кутом 60°. Менша діагональ паралелепіпеда нахилена до площини основи під кутом 45°. Знайдіть об'єм паралелепіпеда.

А. $4\sqrt{2}$ дм^3 **Б.** $4\sqrt{3}$ дм^3 **В.** $2\sqrt{3}$ дм^3 **Г.** 4 дм^3

5. Твірна конуса дорівнює 10 см, а площа його основи – 36π см^2. Знайдіть об'єм конуса.

А. 288π см^3 **Б.** 96π см^3 **В.** 120π см^3 **Г.** 36π см^3

6. Діагональ осьового перерізу циліндра дорівнює 8 см і утворює з площиною основи кут 30°. Знайдіть площу бічної поверхні циліндра.

А. 48π см^2 **Б.** $16\pi\sqrt{2}$ см^2 **В.** 16π см^2 **Г.** $16\pi\sqrt{3}$ см^2

3

7. У прямій трикутній призмі сторони основи дорівнюють 7 см, 15 см і 20 см. Через бічне ребро призми і найменшу за довжиною висоту основи проведено переріз, площа якого дорівнює 21 см^2. Знайдіть об'єм призми.

А. 70 см^3 **Б.** 210 см^3 **В.** 176,4 см^3 **Г.** 105 см^3

8. Висота конуса дорівнює 12 см, а радіус основи конуса на 6 см менший за його твірну. Знайдіть площу бічної поверхні конуса.

А. 135π см^2 **Б.** 216π см^2 **В.** 108π см^2 **Г.** 180π см^2

9. У кулі, об'єм якої дорівнює 288π см^3, проведено переріз на відстані 4 см від центра кулі. Знайдіть площу перерізу.

А. 12π см^2 **Б.** 16π см^2 **В.** 20π см^2 **Г.** 24π см^2

4

10. Основою похилого паралелепіпеда є прямокутник зі сторонами 4 см і 5 см. Бічна грань, що містить меншу сторону основи, перпендикулярна до площини основи і є ромбом, у якого один з кутів на 120° менший за інший. Знайдіть об'єм паралелепіпеда.

А. 20 см^3 **Б.** 60 см^3 **В.** 50 см^3 **Г.** 40 см^3

11. Основою піраміди є прямокутний трикутник з катетом a та протилежним гострим кутом α. Усі бічні ребра піраміди нахилені до площини основи під кутом γ. Знайдіть об'єм піраміди.

А. $\dfrac{a^3 \operatorname{tg}\gamma \sin\alpha}{6\cos^2\alpha}$ **Б.** $\dfrac{a^3 \operatorname{tg}\gamma \cos\alpha}{6\sin^2\alpha}$

В. $\dfrac{a^3 \operatorname{tg}\gamma \cos\alpha}{2\sin^2\alpha}$ **Г.** $\dfrac{a^3 \operatorname{tg}\gamma \cos^2\alpha}{6\sin\alpha}$

12. У циліндрі паралельно осі проведено переріз, що перетинає основу по хорді, яку видно із центра цієї основи під кутом 60°. Площа перерізу, що утворився, $3\sqrt{3}$ см^2, а кут нахилу діагоналі перерізу до площини основи дорівнює 30°. Знайдіть об'єм циліндра.

А. $9\sqrt{3}\pi$ см^3 **Б.** 27π см^3 **В.** $3\sqrt{3}\pi$ см^3 **Г.** $27\sqrt{3}\pi$ см^3

Завдання для перевірки знань до §§ 8–11

1. Знайдіть об'єм прямокутного паралелепіпеда, лінійні виміри якого дорівнюють 3 см, 5 см і 7 см.

2. Об'єм піраміди дорівнює 30 см^3, а висота – 9 см. Знайдіть площу основи піраміди.

3. Радіус основи конуса дорівнює 2 см, а твірна – 4 см. Знайдіть площу повної поверхні конуса.

4. Основа прямого паралелепіпеда – ромб зі стороною 4 см і тупим кутом 120°. Більша діагональ паралелепіпеда нахилена до площини основи під кутом 30°. Знайдіть об'єм паралелепіпеда.

5. Площа основи конуса дорівнює 16π см^2, а його твірна – 5 см. Знайдіть об'єм конуса.

6. Діагональ осьового перерізу циліндра дорівнює 12 см і утворює з площиною основи кут 60°. Знайдіть площу бічної поверхні циліндра.

7. У кулі, об'єм якої дорівнює $\frac{256\pi}{3}$ см^3, проведено переріз. Відрізок, що сполучає центр кулі з точкою кола даного перерізу, утворює з площиною перерізу кут 60°. Знайдіть площу перерізу.

8. В основі трикутної піраміди лежить прямокутний трикутник з гіпотенузою c і гострим кутом α. Усі бічні ребра піраміди нахилені до площини основи під кутом γ. Знайдіть об'єм піраміди.

Додаткові завдання

9. Радіус основи конуса дорівнює 12 см, а твірна на 8 см більша за висоту. Знайдіть площу бічної поверхні конуса.

10. Основою похилого паралелепіпеда є квадрат зі стороною 4 см. Одна з бічних граней паралелепіпеда перпендикулярна до площини основи і є ромбом, у якого один з кутів удвічі більший за інший. Знайдіть об'єм паралелепіпеда.

ВІДПОВІДІ ТА ВКАЗІВКИ ДО ЗАДАЧ І ВПРАВ

Частина 1. АЛГЕБРА І ПОЧАТКИ АНАЛІЗУ

Розділ 1

§ 1. **1.26.** 1) Спадна; 2) зростаюча. **1.27.** 1) Зростаюча; 2) спадна. **1.28.** 1) 8; 2) 9. **1.29.** 1) 3; 2) 16. **1.34.** 1) $[1; +\infty)$; 2) $(0; 1]$; 3) $(0; 1]$; 4) $[1; +\infty)$. **1.35.** $\frac{1}{27}$; 9. **1.36.** $\frac{1}{16}$; 2. **1.37.** 1) $\frac{1}{5}$; 5; 2) $\frac{1}{4}$; 4; 3) 2; 3; 4) 0; 6. **1.38.** 1) $\frac{1}{3}$; 3; 2) 1; 5. **1.39.** 1) $\left(\left(\sqrt{5}\right)^{\sqrt{5}}\right)^{\sqrt{5}} = 5^{2,5}$; 2) $(2-\sqrt{3})^{-3} < (2+\sqrt{3})^{3,2}$. Вказівка. Оскільки $(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3}) = 1$, то $2-\sqrt{3} = (2+\sqrt{3})^{-1}$. **1.40.** 1) $\left(\left(\sqrt{3}\right)^{\sqrt{3}}\right)^{\sqrt{3}} > 2^{1,48}$; 2) $\left(\sqrt{2}-1\right)^{4,2} = \left(\sqrt{2}+1\right)^{-4,2}$. **1.43.** 1) -1; 2) -2. **1.44.** 1) 1; 2) 2. **1.45.** 15 троянд. **1.46.** 500.

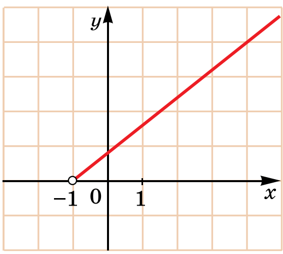
§ 2. **2.23.** 1) 2; 2) 3. **2.24.** 1) 2. **2.25.** 1) 3; 2) -4; 3) 2; 4) 2. **2.26.** 1) 1; 2) -6; 3) 5; 4) $-\frac{1}{4}$. **2.27.** 1) 0; -2; 2) 2. **2.28.** 1) 0; 3; 2) 1. **2.29.** 1) 2; 2) 2. **2.30.** 1) 1; 2) 3. **2.31.** 1) 1; 2) 1; 3; 3) -1; 4) $\frac{1}{2}$; $-\frac{1}{2}$. **2.32.** 1) 1; 2) -1; 0; 3) -1; -2; 4) $\frac{1}{2}$; $-\frac{1}{2}$. **2.33.** 0; 1. **2.34.** 0; 1. **2.35.** 1) 1; 2) 1. **2.36.** 1) 1; 2) 1. **2.37.** 1) 1; -1; 2) 0. **2.38.** 1) 1; -1; 2) 0. **2.39.** 44 460 грн. **2.40.** 2 пігулки.

§ 3. **3.9.** 1) $(-\infty; 4]$; 2) $(-\infty; 0]$. **3.10.** 1) $[2; +\infty)$; 2) $[0; +\infty)$. **3.11.** 1) $x < 2$; 2) $(-\infty; -3] \cup [3; +\infty)$; 3) $(-\infty; -3) \cup (1; +\infty)$; 4) $[-1; 1]$. **3.12.** 1) $x \geqslant 3$; 2) $(-3; 3)$; 3) $(-1; 2)$; 4) $(-\infty; -2] \cup [2; +\infty)$. **3.13.** 1) $[5; +\infty)$; 2) $(-\infty; 6]$. **3.14.** 1) $(-\infty; 7]$; 2) $[10; +\infty)$. **3.15.** 1) $x \geqslant 2$; 2) $x < -3$. **3.16.** 1) $x > 2$; 2) $x \geqslant -2$. **3.17.** 1) $x > 2$; 2) $0 < x < 1$. **3.18.** 1) $1 \leqslant x \leqslant 2$; 2) $x < 0$. **3.19.** 1) $x \geqslant 1,5$; 2) $x < 3$. **3.20.** 1) $x \leqslant 0,5$; 2) $x > 2$. **3.21.** $x < 1$. **3.22.** $x > 2$. **3.23.** $0 \leqslant x \leqslant 1$. **3.24.** $x \leqslant -1$ або $x \geqslant 0$. **3.25.** $x \geqslant 1$. **3.26.** $x < 1$. **3.27.** 1) 3 л; 2) 84 грн. **3.28.** 1) 4000; 2) на 40 днів.

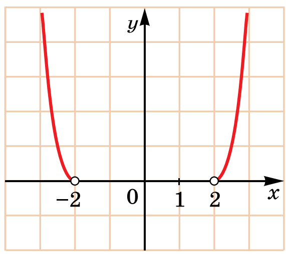
§ 4. **4.31.** 1) 3; 2) 1; 3) 1; 4) 2. **4.32.** 1) 2; 2) 1; 3) -1; 4) 3. **4.33.** 1) $-\frac{2}{5}$; 2) $\frac{1}{6}$; 3) $\frac{1}{3}$; 4) $\frac{1}{15}$. **4.34.** 1) $-\frac{13}{7}$; 2) $-\frac{1}{4}$; 3) 7; 4) $\frac{1}{10}$.

4.37. 1) 2; 2) $\frac{1}{2}$. **4.38.** 1) 2; 2) −3. **4.39.** 1) 3; 2) $\frac{9}{25}$; 3) 25; 4) $\frac{1}{36}$. **4.40.** 1) 2; 2) $\frac{4}{9}$; 3) 2; 4) $\frac{1}{8}$. **4.41.** 1) $\frac{3}{8}$; 2) 10. **4.42.** 1) 45; 2) 12. **4.43.** 1) $m + n$; 2) $m + 1$; 3) $2m + n$; 4) $\frac{n}{m}$. **4.44.** 1) $x + y$; 2) $1 + x$; 3) $2y + x$; 4) $\frac{y}{x}$. **4.45.** 1) $\log_2 5$; 2) 0; $\log_5 4$. **4.46.** 1) $\log_3 2$; 2) 0; $\log_2 3$. **4.50.** 1) $3\frac{5}{9}$; 2) $\frac{1}{3}$. **4.51.** 1) 20,25; 2) 2. **4.52.** 1) 0; 2) −1. **4.53.** 1) 0; 2) $-\frac{1}{2}$. **4.54.** 1) 7; 2) 125; 3) $\frac{1}{7}$; 4) 5. **4.55.** 1) 3; 2) 49; 3) $\frac{1}{4}$; 4) 2. **4.56.** 2. **4.57.** 4. **4.58.** 1. Вказівка. $\lg 5 \cdot \lg 20 = \lg 5 \cdot (2\lg 2 + \lg 5) = 2\lg 5 \lg 2 + \lg^2 5$. **4.59.** На 8 год 48 хв. **4.60.** 180 год.

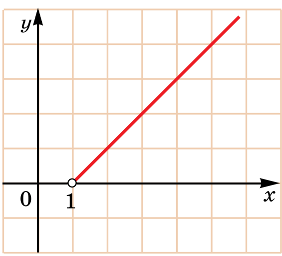
§ 5. **5.21.** 1) $a > 1$; 2) $a > 1$; 3) $a < 1$; 4) $a < 1$. **5.22.** 1) $a < 1$; 2) $a < 1$; 3) $a > 1$; 4) $a > 1$. **5.27.** −2; 1. **5.28.** −1; 2. **5.31.** [2; 3). **5.32.** (2; 4]. **5.35.** 1) $x \neq 2\pi k$, $k \in Z$; 2) $(1; 2) \cup (2; 3)$. **5.36.** 1) $x \neq -\frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in Z$; 2) $(-1; 0) \cup (0; 2)$. **5.37.** 1) 1; 2) 2. **5.38.** 1) 4; 2) 1. **5.39.** 1) Мал. 1; 2) мал. 2. **5.40.** 1) Мал. 3; 2) мал. 4. **5.41.** Більше за 3,5 кг. **5.42.** 1) 3600 л; 2) вказівка. Врахуйте, що 1 м^3 = 1000 л.



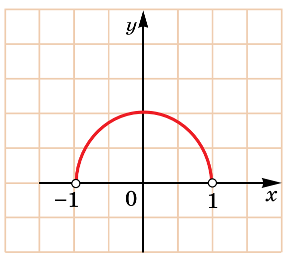
Мал. 1



Мал. 2



Мал. 3



Мал. 4

§ 6. **6.11.** 1; −8. **6.12.** 1; −9. **6.13.** (2; −1). **6.14.** (1; 1). **6.15.** 1) 9; 2) $\frac{1}{8}$. **6.16.** 1) 8; 2) $\frac{1}{81}$. **6.17.** 1) $\pm\sqrt{3}$; 2) 9. **6.18.** 1) $\pm\sqrt{7}$; 2) 81. **6.19.** 1) 0,2; 2) 1. **6.20.** 1) 2; 2) 0. **6.21.** 1) 1; 2) 3. **6.22.** 1) 2; 2) 0. **6.23.** 1) 2; 2) 5; 3) 0; 4) 3. **6.24.** 1) 5; 9; 2) 0; 3) 7; 4) 2; 3. **6.25.** 1) $-\frac{6}{7}$; 342; 2) $\frac{1}{4}$; 16; 3) 0; 26; 4) 2; 128. **6.26.** 1) 7; $2\frac{1}{625}$; 2) 1; 64; 3) 5; 4) 3; 81. **6.27.** 49. **6.28.** $\frac{1}{3}$; $\frac{1}{9}$. **6.29.** $\frac{1}{5}$; 125. **6.30.** 1) 1; 2) −1. **6.31.** 1) 2; 2) 2. **6.32.** $\frac{1}{2}$. **6.33.** $\frac{1}{2}$. **6.34.** 14. **6.35.** 5. **6.36.** 1) 4; $\frac{1}{4}$; 2) 7. **6.37.** 1) 27; $\frac{1}{27}$; 2) 2. **6.38.** Жодного. **6.39.** Один. **6.40.** 1) 2; 2) 3. **6.41.** 1) 0; 2) рівняння не має розв'язків. **6.42.** 1) 16; 2) −9. **6.43.** 1) 9522 грн; 2) 14 283 грн; 3) 19 044 грн. **6.44.** 18 000 кг.

§ 7. **7.7.** 1) $1 < x < 3$; 2) $x > 4$. **7.8.** 1) $1 < x < 5$; 2) $x > 2$. **7.9.** 1) $x \geqslant 2$; 2) $-1 < x < 0$. **7.10.** 1) $x > -2$; 2) $3 < x \leqslant 4$. **7.11.** 1) $[-1; 0) \cup (2; 3]$; 2) $(-\infty; -1) \cup (4; +\infty)$. **7.12.** 1) $(-\infty; -1] \cup [9; +\infty)$; 2) $(-5; -4) \cup (0; 1)$. **7.13.** 1) $(0; 1]$; 2) $(3; +\infty)$. **7.14.** 1) $(3; +\infty)$; 2) $(0; 5]$. **7.15.** 1) $(0; 0{,}5] \cup [4; +\infty)$; 2) $(0{,}01; 100)$. **7.16.** 1) $\left(\frac{1}{3}; 9\right)$; 2) $\left(0; \frac{1}{2}\right] \cup [2; +\infty)$. **7.17.** $x > 100$. **7.18.** $x > 10$. **7.19.** 1) $(-3; -2)$; 2) $(-1{,}5; 1) \cup (1; +\infty)$. **7.20.** 1) $(-3; -1) \cup (3; 4)$; 2) $(2; +\infty)$. **7.21.** 1) $[0{,}1; 1000]$; 2) $\left(0; \frac{1}{16}\right) \cup \left(\frac{1}{4}; +\infty\right)$. **7.22.** 1) $[1; 25]$; 2) $(0; 0{,}1) \cup (100\,000; +\infty)$. **7.23.** $x = 4$. **7.24.** $x = 5$. **7.25.** Жодного. **7.26.** Два. **7.27.** (0; 3). **7.28.** (0; 2). **7.29.** 1) Якщо $a < 0$, то $0 < x \leqslant 1$; якщо $a = 0$, то $x > 0$; якщо $a > 0$, то $x \geqslant 1$; 2) якщо $a < 0$, то $0 < x < 3^{\frac{1}{a}}$; якщо $a = 0$, то нерівність не має розв'язків; якщо $a > 0$, то $x > 3^{\frac{1}{a}}$. **7.30.** 1) 171 кг; 5130 кг; 2) 4617 м^2. **7.31.** ≈ 27 776 грн.

Розділ 2

§ 8. **8.15.** 1) Так; 2) ні. **8.16.** 1) Ні; 2) так. **8.19.** 60 мг. **8.20.** 11 200 грн.

§ 9. 9.17. 1) $3x^3 - x^2 - 22$; 2) $3x + 8\sqrt{x} - 11$. **9.18.** 1) $x^4 + 3x^2 - 2$; 2) $4\sqrt{x} - 5x$. **9.19.** 1) $\frac{(3x-2)^7}{21} + C$; 2) $3\sin\left(\frac{x}{3} - \frac{\pi}{9}\right) + C$; 3) $\frac{1}{2}\sqrt{4x+7} + C$; 4) $-2\mathrm{ctg}3x + C$. **9.20.** 1) $\frac{(4x+1)^6}{24} + C$; 2) $-2\cos\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{8}\right) + C$; 3) $\sqrt{2x-3} + C$; 4) $4\mathrm{tg}2x + C$. **9.21.** 1) $-\frac{1}{2}\cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) + 2$; 2) $-\frac{2}{4x-3} - 3$. **9.22.** 1) $\frac{1}{4}\sin\left(4x - \frac{\pi}{12}\right)$; 2) $2 - \frac{3}{2x+1}$. **9.23.** $s(t) = 3t + t^2 - 20$. **9.24.** $v(t) = 7t - t^2 - 1$. **9.25.** $\frac{1}{2}\sqrt{4x-1} - 8\,\mathrm{ctg}\frac{x}{2} + C$. **9.26.** $\sqrt{2x+3} - 12\,\mathrm{tg}\frac{x}{4} + C$. **9.27.** 1) $-\frac{1}{4}\cos 4x + C$; 2) $\frac{1}{5}\sin\left(5x + \frac{\pi}{8}\right) + C$; 3) $\frac{x^7}{7} - x^4 + \frac{4}{3}x^3 + C$; 4) $\frac{x^4}{4} - 3x - \frac{7}{x} + C$. **9.28.** 1) $4\sin\frac{x}{4} + C$; 2) $-\frac{1}{3}\cos\left(3x - \frac{\pi}{12}\right) + C$; 3) $\frac{x^5}{5} - \frac{x^4}{2} + \frac{x^3}{3} + C$; 4) $\frac{x^7}{7} - 5x + C$. **9.29.** $x^3 - 3x^2 + 8x - 6$. **9.30.** $x^4 - x^2 + 3x + 3$. **9.31.** −15 м/с. **9.32.** 62 м. **9.33.** 16 %. **9.34.** 25 хв.

§ 10. 10.9. 1) $6\frac{2}{3}$; 2) $1\frac{1}{3}$. **10.10.** 1) $1\frac{1}{3}$; 2) $6\frac{2}{3}$. **10.11.** 1) $\frac{1}{2}$; 2) 1. **10.12.** 1) $\frac{3}{4}$; 2) 4. **10.13.** 1) $520\frac{5}{6}$ м; 2) 1 м/с^2. **10.14.** 1) $66\frac{2}{3}$ м; 2) 0 м/с^2. **10.15.** $\frac{1}{2}$. **10.16.** 2,5. **10.17.** 7. **10.18.** $1{,}5 + \frac{\pi}{4}$. **10.19.** 8,25 м. **10.20.** 64,5 м. **10.21.** Через 6 місяців. **10.22.** 1) 450 г; 2) 350 г.

§ 11. 11.6. 1) 0,2; 2) −1,5; 3) 0; 4) $\frac{4}{\sqrt{3}}$. **11.7.** 1) 4; 2) 4; 3) 0,2; 4) $\frac{2}{\sqrt{3}}$. **11.8.** 1) $37\frac{29}{60}$; 2) 0. **11.9.** 1) $3\frac{1}{6}$; 2) $\frac{2}{3}$. **11.10.** 1) π; 2) 4,5π. **11.11.** 1) $\frac{\pi}{4}$; 2) 8π. **11.12.** 1) $33\frac{1}{6}$; 2) $1\frac{15}{16}$; 3) $\frac{\pi}{2}$. **11.13.** 1) 0; 2) 9,75; 3) π. **11.14.** $8\frac{1}{3}$. **11.15.** $24\frac{2}{3}$. **11.16.** 2,5. **11.17.** 12,5. **11.18.** 4 + 2π. **11.19.** 1) 13 500 Вт. **11.20.** 12 %.

§ 12. **12.2.** $\frac{1}{6}$. **12.3.** $\frac{4}{3}$. **12.4.** 36 Дж. **12.5.** 22 Дж. **12.6.** 1) 4,5; 2) 4,5; 3) $10\frac{2}{3}$; 4) $1\frac{5}{27}$; 5) $5\frac{1}{3}$; 6) $1\frac{2}{3}$. **12.7.** 1) 4,5; 2) $10\frac{2}{3}$; 3) $1\frac{1}{3}$; 4) $1\frac{1}{8}$; 5) $21\frac{1}{3}$; 6) $2\frac{1}{6}$. **12.8.** 0,375 Дж. **12.9.** 0,45 Дж. **12.10.** 2. **12.11.** 1,5. **12.12.** $\frac{1}{3}$. **12.13.** 1) 20 дерев; 2) 30 000 зошитів; 3) 240 м^3. **12.14.** 150 000 грн.

Розділ 3

§ 13. **13.21.** 1) Ні; 2) так; 3) ні. **13.22.** 1) Так; 2) ні; 3) ні. **13.23.** 250 мг. **13.24.** Найменший рейтинг – модель A ($R = 10$); найбільший рейтинг – модель B ($R = 20$).

§ 14. **14.15.** 120. **14.16.** 720. **14.17.** 30. **14.18.** 840. **14.19.** 560. **14.20.** 4845. **14.21.** 120. **14.22.** 105. **14.23.** 216. **14.24.** 16. **14.25.** 1) 120; 2) 625. **14.26.** 1) 60; 2) 125. **14.27.** 1) $-\frac{1}{144}$; 2) $\frac{1}{6720}$. **14.28.** 1) $-\frac{1}{30}$; 2) $\frac{1}{1200}$. **14.29.** 1) 5; 2) 10. **14.30.** 1) 4; 2) 12. **14.31.** 6. **14.32.** 120. **14.33.** 600. **14.34.** 18. **14.35.** 8. **14.36.** 56. **14.37.** 70. **14.38.** 560. **14.39.** 1050. **14.40.** 120. **14.41.** 132. **14.42.** 1) 1, 2, 3, 4, 5; 2) 11, 12, 13, ... **14.43.** 1) 4, 5, 6, 7, ...; 2) 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8. **14.45.** 1) 60; 2) 1260. **14.46.** 1) 360; 2) 120. **14.47.** 21. **14.48.** 720. **14.49.** 48. **14.50.** 2520. **14.51.** 90. **14.52.** 10. **14.53.** 72. **14.54.** 1) 560; 2) 140; 3) 420. **14.55.** 14 км/год. **14.56.** 1) 200 грн; 2) 1200 грн; 3) 1000 грн; 4) 180 грн; 5) 820 грн.

§ 15. **15.13.** Ні. **15.14.** 1) $\approx 0{,}44$; 2) $\approx 0{,}23$; 3) $\approx 0{,}76$; 4) $\approx 0{,}91$. **15.15.** 1) $\approx 0{,}09$; 2) $\approx 0{,}24$; 3) $\approx 0{,}56$; 4) $\approx 0{,}77$. **15.19.** 1) 10 деталей; 2) 1500 деталей. **15.20.** 1) 686; 2) 700. **15.21.** 26 або 27 кидків. **15.22.** Від 26 до 29 пострілів. **15.23.** 1) 54 000 осіб. **15.24.** 2520 грн.

§ 16. **16.14.** $\frac{3}{4}$. **16.17.** $\frac{1}{66}$. **16.18.** $\frac{1}{120}$. **16.19.** $\frac{2}{3}$. **16.20.** $\frac{1}{2}$. **16.21.** 1) $\frac{1}{6}$; 2) $\frac{1}{12}$; 3) $\frac{1}{6}$; 4) $\frac{5}{12}$. **16.22.** 1) $\frac{5}{6}$; 2) $\frac{1}{9}$; 3) $\frac{5}{6}$; 4) $\frac{7}{12}$. **16.23.** 1) 12; 2) 6; 3) менше ніж 6; 4) більше за 7. **16.24.** 1) 5; 2) 15; 3) більше за 15; 4) менше ніж 5. **16.25.** $\frac{1}{10}$. **16.26.** $\frac{2}{5}$. **16.27.** $\frac{1}{720}$.

16.28. $\frac{1}{120}$. **16.29.** $\frac{7}{190}$. **16.30.** $\frac{13}{105}$. **16.31.** $\frac{1}{5}$. **16.32.** $\frac{2}{15}$. **16.33.** $\frac{156}{245}$. **16.34.** $\frac{357}{494}$. **16.35.** 1) $\frac{2}{13}$; 2) $\frac{6}{13}$; 3) $\frac{72}{91}$. **16.36.** 1) $\frac{7}{45}$; 2) $\frac{7}{15}$. **16.37.** $\frac{1}{28}$. **16.38.** $\frac{2}{5}$. **16.39.** $\frac{1}{360}$. **16.40.** $\frac{1}{168}$. **16.41.** ≈ 158 см. **16.42.** 1) 28 % за сніданком, 40 % – за обідом, 12 % – за полуденком; 2) 500 Ккал.

§ 17. 17.19. 1) $a = 5$; 2) $Me = 9$. **17.20.** 1) $b = 5$; 2) $Me = 10$. **17.21.** 1) $\bar{x} = 2$; 2) $Mo = 3$; 3) $Me = 2$. **17.22.** 1) $\bar{x} = 1{,}55$; 2) $Mo = 2$; 3) $Me = 2$. **17.25.** 438 грн. **17.26.** 12,2 км.

Відповіді до завдань «Перевірте свою компетентність!»

№ вправи / № завдання	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	А	В	В	Г	Д	Г	1-В, 2-Г, 3-Д, 4-А	–0,96	–2
2	Г	Д	Г	В	В	А	1-Д, 2-В, 3-Г, 4-Б	20	–2
3	Б	В	Г	Г	Б	А	1-Б, 2-Г, 3-Д, 4-А	3	195
4	В	Г	А	В	Д	Б	1-В, 2-А, 3-Д, 4-Г	12	–4
5	Г	Д	Г	Б	А	Г	1-Д, 2-Г, 3-В, 4-Б	0,5	1
6	Г	В	Б	Г	Г	Б	1-В, 2-Г, 3-А, 4-Б	50	120
7	Б	В	Г	А	Б	Г	1-В, 2-Д, 3-А, 4-Г	0,25	0,5
8	Б	Г	В	В	Д	Г	1-Г, 2-В, 3-А, 4-Б	4	–8,75
9	В	Б	В	Д	Г	В	1-В, 2-Г, 3-Б, 4-А	–25	8,75
10	Г	Г	В	Б	Б	В	1-Д, 2-В, 3-Г, 4-Б	400	–1
11	А	Д	Б	Г	В	Б	1-А, 2-В, 3-Г, 4-Д	–0,5	0,25
12	Б	В	Г	В	А	В	1-Г, 2-А, 3-Б, 4-Д	1	16
13	Г	Д	А	В	Г	Б	1-Д, 2-А, 3-Б, 4-В	1	10
14	Д	В	В	А	А	Б	1-Б, 2-А, 3-Д, 4-В	224	8
15	А	В	Б	Г	А	Д	1-А, 2-Б, 3-В, 4-Г	1	2
16	Б	В	Д	Д	Г	Г	1-В, 2-Б, 3-А, 4-Г	6	0,25
17	Б	В	В	Г	А	Б	1-В, 2-Г, 3-Б, 4-А	0,125	14

Відповіді до завдань «Домашня самостійна робота»

№ завдання / № роботи	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	В	Б	А	Г	В	Г	Б	А	А	Б	В	Г
2	В	Г	В	А	Б	Г	Б	А	Б	Г	Г	В
3	В	Г	Б	А	В	Б	Г	В	А	Г	В	Б

Частина II. ГЕОМЕТРІЯ

Розділ 1

§ 1. **1.17.** 270 г. **1.18.** 360 г. **1.19.** 36 см^2. **1.20.** 120 см^2. **1.21.** 3 см. **1.22.** 10 см. **1.25.** $18\sqrt{2}$ см^2. **1.26.** 170 см^2. **1.27.** 1) Так; 2) ні. **1.28.** 1) Ні; 2) так. **1.29.** 10 см. **1.30.** 1,9 м^2. **1.31.** $12\sqrt{2}$ см^2. **1.32.** $2\sqrt{3}$ дм^2. **1.33.** $64\sqrt{3}$ см^2. **1.34.** $64\sqrt{2}$ см^2. **1.35.** 5 см. **1.36.** 2 см. **1.37.** 6 см. **1.38.** 13 см. **1.39.** 1380 см^2. **1.40.** 1066 см^2. **1.41.** $\sqrt{3}:2$. **1.42.** $\sqrt{3}:1$. **1.43.** $\frac{4Q\operatorname{tg}\beta}{d^2}\sqrt{d^4+Q^2}$. **1.44.** $12S\operatorname{tg}\alpha$. **1.45.** $48\sqrt{33}$ см^2. **1.46.** Вказівка. Переставте місцями нижню і верхню частини призми, сумістивши основи. **1.47.** 10 см. **1.48.** 240 см^2. **1.49.** Сергій; на 1 хв 21 с. **1.50.** 4 банки.

§ 2. **2.6.** По 0,384 дм^2 пластмаси кожного кольору. **2.7.** 181,5 см^2. **2.8.** 48 см^2. **2.9.** 12 дм^2. **2.12.** 7 см. **2.13.** 4 см. **2.16.** 5 см. **2.17.** 13 см. **2.18.** 1) 78 см^2; 2) 3 см. **2.19.** 1) 80 см^2; 2) 5 см. **2.20.** 1) 2 см; 2) 4 см; 3) 32 см^2; 4) 40 см^2; 5) $8\sqrt{2}$ см^2. **2.21.** 1) 6 см; 2) $2\sqrt{7}$ см; 3) $48\sqrt{7}$ см^2; 4) $72 + 48\sqrt{7}$ см^2; 5) $12\sqrt{14}$ см^2. **2.22.** 72 см^2. **2.23.** 192 см^2. **2.24.** 1) $10\sqrt{97}$ см^2; 2) 220 см^2. **2.25.** 1) 20 см^2; 2) 80 см^2. **2.26.** 276 г. **2.27.** 133 г. **2.28.** 144 см^2. **2.29.** $16\sqrt{30}$ см^2. **2.30.** $80\sqrt{3}$ см^2. **2.31.** 120 см^2. **2.32.** 7 см. **2.33.** 5 см. **2.35.** 3 см. **2.36.** $2\sqrt{2}$ см. **2.37.** $\sqrt{55}$ см. **2.38.** Квадратна плитка зі стороною 3 дм; 10 000 грн. **2.39.** 1) 72 000 000 м^3; 2) 5 400 000 000 м^3.

§ 3. **3.17.** $\approx 10{,}9$ м^2. **3.18.** $\approx 116{,}8$ см^2. **3.25.** 2) 12 см. **3.26.** 20 см і 15 см. **3.27.** $\approx 155{,}5$ м. **3.28.** $\approx 201{,}9$ м. **3.29.** $9\sqrt{3}$ см^2; $\sqrt{39}$ см. **3.30.** 50 см^2; $\frac{5\sqrt{6}}{2}$ см. **3.31.** $36+24\sqrt{3}$ см^2. **3.32.** $12\sqrt{3}$ см^2. **3.33.** $3\sqrt{3}$ см. **3.34.** 4 см. **3.35.** $4\sqrt{3}$ см. **3.36.** 24 см^2. **3.37.** $21\frac{1}{8}$ см. **3.38.** 9 см. **3.40.** $24 + 24\sqrt{3}$ см^2. **3.41.** 297 см^2. **3.42.** 5 см. **3.43.** 2,4 см. **3.44.** 3 см. **3.45.** $9\sqrt{33}$ см^2. **3.46.** $4\sqrt{3}$ см^2. **3.47.** $\sqrt{6}$. **3.48.** $\frac{1}{2}$. **3.49.** 0,5 м. **3.50.** 48 мішків.

§ 4. **4.9.** 32 см^2. **4.10.** 4 см. **4.11.** 3600°. **4.12.** 1440°. **4.15.** $a\sqrt{2}$. **4.16.** $\frac{h\sqrt{6}}{2}$. **4.17.** $\arccos\frac{1}{3}\approx 70°32'$. **4.18.** $\arccos\frac{\sqrt{3}}{3}\approx 54°44'$. **4.19.** $\frac{2a\sqrt{6}}{9}$. **4.20.** $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. **4.22.** 11 025. **4.23.** 11 рулонів.

Розділ 2

§ 5. 5.14. Висота – 6 см; радіус – 3 см. **5.15.** По 4 см. **5.16.** По 6 см. **5.17.** Радіус – 2 см; висота – 6 см. **5.18.** 420 см^2. **5.19.** 120 см^2. **5.20.** 1) 5 см; 2) $25\sqrt{3}$ см^2; 3) 5 см; 4) 25 см^2. **5.21.** 1) $6\sqrt{3}$ см; 2) $36\sqrt{3}$ см^2; 3) 6 см; 4) 12π см. **5.22.** 4 см. **5.23.** 30 см^2. **5.24.** $l^2\sin 2\beta$. **5.25.** $2r^2\operatorname{tg}\alpha$. **5.26.** 8π см. **5.27.** 60 см^2. **5.28.** 14 см^2. **5.29.** 28 см^2. **5.30.** 2 см. **5.31.** 4 см. **5.32.** $\frac{1}{2}d\cos\alpha\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}$. **5.33.** $\dfrac{2m\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{\cos\gamma}$. **5.34.** 3 см. **5.35.** 1,21 м. **5.36.** 2261 грн.

§ 6. 6.16. 36 см. **6.17.** 64 см. **6.18.** 16 см або 18 см. **6.19.** 6 см. **6.20.** 12 см. **6.21.** 3 см^2. **6.22.** 3,75 см^2. **6.23.** 2 см. **6.24.** 3 см. **6.25.** $S\operatorname{ctg}\beta$. **6.26.** $2\pi Q\operatorname{ctg}\gamma$. **6.27.** $\arccos\dfrac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\beta}{2}}$. **6.28.** $\dfrac{\alpha\operatorname{tg}\gamma}{2\sin\frac{\beta}{2}}$. **6.29.** На 2 т. **6.30.** 1) 15,8 м; 2) 632 грн.

§ 7. 7.21. Одне або безліч. **7.22.** 2 см. **7.23.** 12 см. **7.24.** 16π см. **7.25.** 36π см^2. **7.26.** 12 см. **7.27.** 2 см. **7.28.** 4 см. **7.29.** 10 см. **7.30.** 10 см. **7.31.** 8 см. **7.32.** $\frac{3}{5}\sqrt{\frac{S}{\pi}}$. **7.33.** $\frac{4}{5}\sqrt{Q}$. **7.34.** 35 см. **7.35.** 8 см. **7.36.** 25 : 169. **7.37.** 16 : 25. **7.38.** Ні. **7.39.** 1) 8,16 м^2; 2) $\approx$ 1,63 кг; 2 банки по 1 кг.

Розділ 3

§ 8. 8.19. 46 відер. **8.20.** 16 відер. **8.21.** Ні. **8.22.** 96 см^2. **8.23.** 27 см^3. **8.24.** 3315 г. **8.25.** 26 машин. **8.26.** 72 машини. **8.27.** 120. **8.28.** 40 дм^3. **8.29.** 12 дм^3. **8.30.** $480\sqrt{3}$ см^3. **8.31.** $768\sqrt{3}$ см^3. **8.32.** Ні. **8.33.** 60 см^3. **8.34.** 768 см^3. **8.35.** 168 см^2. **8.36.** 240 см^2. **8.37.** 100 см^3. **8.38.** 108 см^3. **8.39.** 192 см^3. **8.40.** 1152 см^3. **8.41.** 2160 м^3. **8.42.** 87 750 м^3. **8.43.** $54\sqrt{3}$ см^3. **8.44.** $128\sqrt{3}$ см^3. **8.45.** 630 см^3. **8.46.** 840 см^3. **8.47.** 252 см^3. **8.48.** 30 см^3. **8.49.** $512\sqrt{2}$ см^3. **8.50.** $125\sqrt{2}$ см^3. **8.51.** 144 см^3. **8.52.** $256\sqrt{2}$ см^3. **8.53.** $\frac{d^2}{4}\cos^2\beta\sin\beta\sin 2\alpha$. **8.54.** $\frac{c^3}{4}\sin 2\alpha\cos\alpha\operatorname{tg}\beta$. **8.55.** $\frac{1}{2}a^3\cos\frac{\beta}{2}\sin\beta\operatorname{tg}\gamma$. **8.56.** $\frac{3a^2}{4}\operatorname{tg}\alpha$. **8.57.** 84 см^3. **8.58.** 40 см^3. **8.59.** $240\sqrt{3}$ см^3. **8.60.** 72 см^3. **8.61.** $20\sqrt{2}$ см^3. **8.62.** $128\sqrt{2}$ см^3. **8.63.** $30\sqrt{3}$ см^3. **8.64.** 60 см^3. **8.65.** 8 разів. **8.66.** $\approx$ 63,7 м.

§ 9. **9.13.** 6 см. **9.14.** 9 см. **9.15.** Збільшиться у 2 рази. **9.16.** $216\sqrt{3}$ см³. **9.17.** $243\sqrt{3}$ см³. **9.18.** 32 см³. **9.19.** 560 см³. **9.20.** 2) 2880 см³. **9.21.** 2) 768 см³. **9.22.** $50\sqrt{3}$ см³. **9.23.** $96\sqrt{3}$ см³. **9.24.** 36 см³. **9.25.** $\frac{V}{6}$. **9.26.** $\frac{V}{3}$. **9.27.** $\frac{250\sqrt{3}}{3}$ см³. **9.28.** $128\sqrt{3}$ см³. **9.29.** $72\sqrt{3}$ см³. **9.30.** 864 см³. **9.31.** ≈ 2 014 639 м³. **9.32.** ≈ 2 596 298 м³. **9.33.** $64\sqrt{3}$ см³. **9.34.** 256 см³. **9.35.** $\frac{R^3\sqrt{6}}{4}$. **9.36.** $\frac{\sqrt{3}}{4}h\left(l^2-h^2\right)$. **9.37.** 20 см³. **9.38.** $\frac{1}{12}d^2\sin 2\alpha\sqrt{4l^2-d^2}$. **9.39.** $\frac{1}{6}b^2\operatorname{ctg}\beta\sqrt{l^2-\frac{b^2}{4\sin^2\beta}}$. **9.40.** 216 см³. **9.41.** 72 см³. **9.42.** $96\sqrt{3}$ см³. **9.43.** Якнайшвидше за маршрутом AK; KL; LC – за 14,1 хв; найповільніше за маршрутом AD; DC – за 17,1 хв. **9.44.** 80 відер.

§ 10. **10.23.** 54π см³. **10.24.** 72π см³. **10.25.** 6 дм³. **10.26.** ≈ 12 560 см³. **10.27.** ≈ 9,2 т. **10.28.** ≈ 26 т. **10.37.** 5 см. **10.38.** 36 см. **10.45.** 1) $\frac{1084}{3}$ см³; 2) ≈ 3178 г. **10.46.** 1) $\frac{386\pi}{3}$ см³; 2) ≈ 8852 г. **10.47.** 10 см. **10.48.** 4 см. **10.49.** $100\pi\sqrt{3}$ см³. **10.50.** 125π см³. **10.51.** 1) 4 см; 2) 144 см. **10.52.** У 16 разів. **10.53.** 1008π см³. **10.54.** 180π см³. **10.55.** 192π см³. **10.56.** $27\sqrt{2}\pi$ см³. **10.57.** $\frac{\pi m^3}{\cos^2\beta\sin\beta}$. **10.58.** $8\pi l^3\cos^2\alpha\sin\alpha$. **10.59.** 392π см³. **10.60.** 96π см³. **10.61.** 36π см³. **10.62.** 48π см³. **10.63.** $\frac{\pi d^3}{3\cos^2\alpha\sin\alpha}$. **10.64.** $\frac{8\pi}{3}m^3\cos^2\beta\sin\beta$. **10.65.** $\sqrt[3]{36}$ см. **10.66.** $3\sqrt[3]{7}$ см. **10.67.** ≈ 2,6 см. **10.68.** ≈ 4,3 см. **10.69.** 18π см². **10.70.** 16π см². **10.71.** $27\sqrt{6}\pi$ см³. **10.72.** $72\sqrt{3}\pi$ см³. **10.73.** $\frac{\pi b^3\operatorname{ctg}\alpha}{4\sin^2\frac{\beta}{2}}$. **10.74.** $\frac{\pi d^3\cos^2\alpha\sin\alpha}{4\sin^2\frac{\gamma}{2}}$. **10.75.** $\frac{\pi p^3\operatorname{tg}\alpha}{4(1+\operatorname{tg}\alpha)^3}$. **10.76.** $\frac{\pi Q}{4}$. **10.77.** $76{,}8\pi$ см³. **10.78.** 54π см³. **10.79.** $\frac{\pi p^3}{3\operatorname{tg}\alpha(1+\sin\alpha)^3}$. **10.80.** $\frac{\pi p^3}{3\operatorname{tg}\gamma(1+\cos\gamma)^3}$. **10.81.** Так, оскільки її радіус менший за радіус циліндра. **10.82.** 3 см. **10.83.** 2 см. **10.84.** 502,4 м². **10.85.** 4,25 м².

§ 11. **11.27.** 36π см^2. **11.28.** 288π см^3. **11.29.** 676π см^3. **11.30.** 400π см^2. **11.31.** 144π см^2. **11.32.** $24\sqrt{3}\pi$ см^2. **11.33.** $\pi d^2 \sin 2\alpha$. **11.34.** $2\pi a^2(1 + \text{tg}\beta)$. **11.35.** $\approx 61{,}8$ дм^2. **11.36.** $\approx 2{,}6$ м^2. **11.37.** 96π см^2. **11.38.** 1200π см^2. **11.39.** $\dfrac{\pi l^2\sqrt{2}}{2}$. **11.40.** $24\sqrt{6}\pi$ см^2. **11.43.** 9π см^2. **11.44.** 16π см^2. **11.45.** $\dfrac{2\pi Q\sqrt{3}}{3}$. **11.46.** $\pi M\sqrt{2}$. **11.47.** 1) 100π см^2; 2) 125π см^3. **11.48.** 1) 48π см^2; 2) 32π см^3. **11.49.** $52{,}8\pi$ см^2. **11.50.** $16{,}8\pi$ см^2. **11.51.** $\approx 312°$. **11.52.** $\approx 255°$. **11.53.** 2500π см^2. **11.54.** 1300π см^2. **11.55.** $80°$. **11.56.** У 25 разів.

Відповіді до завдань «Перевірте свою компетентність!»

№ вправи / № завдання	1	2	3	4	5	6
1	В	А	Д	Б	1-В, 2-А, 3-Д, 4-Б	0,75
2	Б	Г	А	В	1-А, 2-Д, 3-Б, 4-В	3
3	Б	Г	А	В	1-Б, 2-Д, 3-А, 4-В	56
4	Б	А	Д	В	1-Д, 2-Г, 3-В, 4-А	64
5	Г	Б	А	В	1-Д, 2-Г, 3-В, 4-А	48
6	Г	Д	Г	В	1-А, 2-Б, 3-Д, 4-Г	7
7	Б	В	Г	А	1-Г, 2-Д, 3-А, 4-Б	16
8	Б	Г	В	В	1-Д, 2-А, 3-Г, 4-В	–18
9	Г	В	Б	В	1-В, 2-Б, 3-Г, 4-Д	120
10	А	В	Г	В	1-В, 2-Г, 3-А, 4-Б	144
11	А	Б	Г	Д	1-А, 2-Д, 3-Г, 4-Б	2,5

Відповіді до завдань «Домашня самостійна робота»

№ завдання / № роботи	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	В	Г	Б	А	В	Б	Г	А	В	Б	Г	А
2	В	Б	В	А	Г	В	Б	Г	А	Б	Б	В
3	В	Г	В	А	Б	Г	Б	А	В	Г	Б	А

ПРЕДМЕТНИЙ ПОКАЖЧИК

Частина І. АЛГЕБРА І ПОЧАТКИ АНАЛІЗУ

Вибірка 160
Вибірковий метод 160
Вибіркові характеристики 162
Винесення спільного множника за дужки в показникових рівняннях 19
Випадкова подія 139
Випадковий дослід 139
Відносна частота події 140
Вірогідна подія 139
Властивості логарифмічної функції 47
– показникової функції 8
– степеня з дійсним показником 9
Впорядкована множина 161

Генеральна сукупність 160
Геометричний зміст визначеного інтеграла 94
Графік логарифмічної функції 46
– показникової функції 8

Десятковий логарифм 36

Елементарні події 150
Елементи множини 120

Заміна змінних у логарифмічних рівняннях 56
– – – показникових рівняннях 20

Інтеграл визначений 92
– невизначений 76

Ймовірність вірогідної події 142
– неможливої події 142

Класичне означення ймовірності 151
Комбінаторика 125
Комбінації (сполучення) 130

Логарифм числа 32
Логарифмічна функція 45

Математична статистика 159
Медіана вибірки 162
Множина 120
Мода вибірки 162

Найпростіші логарифмічні нерівності 62
– – рівняння 54
– показникові нерівності 26
– – рівняння 18
Натуральний логарифм 36
Неможлива подія 139
Нерівності виду
$\log_a f(x) > \log_a g(x)$ 64
– – $\log_a f(x) \geqslant \log_a g(x)$ 64
Нескінченні множини 121
Несумісні події 150

Обчислення площ плоских фігур 109
Однорідні показникові рівняння 20
Основна властивість первісної 75
– логарифмічна тотожність 33
Основні властивості визначеного інтеграла 103, 104
– – логарифмів 33

Первісна 74
Правила знаходження первісних (невизначених інтегралів) 82, 83
Правило добутку 126
– суми 126
Перестановки 130
Підмножини 120
Повна група подій 150
Показникова функція 7
Полігон частот 163
Попарно несумісні події 150
Порожня множина 120
Потенціювання 34
Простір елементарних подій 150

Ранжування вибірки 161
Репрезентативна вибірка 161
Рівність множин 121
Рівноймовірні події 151
Рівняння виду $a^{f(x)} = a^{g(x)}$ 19
– – $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ 54
– – $\log_a f(x) = g(x)$ 55
Розмах вибірки 162
Розміщення 128

Середнє значення вибірки 162
Скінченна множина 121
Статистична ймовірність події 141
Статистичні дані 159
Степінь з довільним показником 6
Сумісні події 150

Таблиця первісних (невизначених інтегралів) 80
Теорема про площу криволінійної трапеції 91
Теорія ймовірностей 138

Факторіал 128
Фізичний зміст визначеного інтеграла 94
Формула Ньютона–Лейбніца 101
– переходу до іншої основи 35

Частота події 140

Частина II. ГЕОМЕТРІЯ

Апофема піраміди 198

Бічна поверхня конуса 225
– – циліндра 217
Бічні грані піраміди 195
– – призми 175
Бічні ребра піраміди 195
– – призми 175

Велике коло 235
Великий круг 235
Вершина конуса 225
– піраміди 195
– многогранника 173
Виміри прямокутного паралелепіпеда 188
Висота конуса 225
– піраміди 196
– призми 175
– циліндра 217
Взаємне розміщення кулі та площини 233
Вісь конуса 225
– правильної піраміди 198
– тіла обертання 216
– циліндра 217
Властивість діагоналей паралелепіпеда 186
– площини, дотичної до кулі 234
– протилежних граней паралелепіпеда 186
Властивості правильних многогранників 207, 208

Грані многогранника 173

Діагональ призми 175
Діагональний переріз піраміди 199
– – призми 178
Діаметр основи конуса 225
– кулі 232
– сфери 232
– циліндра 217
Діаметральна площина 234
Додекаедр 207

Ікосаедр 207

Кавальєрі принцип 246
Конус 225
Куб 189, 207
Куля 232

Многогранник 173

Неопуклі многогранники 173

Об’єм конуса 266
– кулі 268
– піраміди 256

– призми 246
– прямокутного паралелепіпеда 244
– тіла 244
– циліндра 264
Основні властивості об’ємів 244
Октаедр 207
Опуклі многогранники 173
Основа конуса 225
– піраміди 195
Основи призми 174
– циліндра 217
Осьовий переріз конуса 226
– – тіла обертання 216
– – циліндра 218

Паралелепіпед 186
– похилий 186
– прямий 186
– прямокутний 188
Переріз кулі площиною 234
– многогранника 177
Піраміда 195
– n-кутна 196
– правильна 198
Площа бічної поверхні конуса 279
– – – піраміди 196
– – – призми 175
– – – циліндра 278
– поверхні многогранника 174
– повної поверхні конуса 279
– – – піраміди 196
– – – призми 175
– – – циліндра 278
– сфери 280
Площина, дотична до кулі 234
Поверхня обертання 216
Правильний многогранник 207
– тетраедр 207
Призма 174
– n-кутна 175
– похила 175
– правильна 175
– пряма 175
Протилежні грані паралелепіпеда 186

Радіус основи конуса 225
– кулі 232
– сфери 232
– циліндра 217
Ребра многогранника 173
Рівновеликі тіла 244
Розгортка бічної поверхні конуса 278
– – – циліндра 277
– многогранника 174
Рівносторонній конус 226
Рівносторонній циліндр 218

Січна площина многогранника 177
Сфера 232

Твірна конуса 225
– циліндра 217
Теорема про площу бічної поверхні правильної піраміди 198
– – – – – прямої призми 176
Тетраедр 196
Тіло обертання 216

Формула для обчислення діагоналі прямокутного паралелепіпеда 188

Центр кулі 232
– сфери 232
Циліндр 217

ЗМІСТ

Шановні одинадцятикласниці та одинадцятикласники! 3
Шановні вчительки та вчителі! 4

Частина І. АЛГЕБРА І ПОЧАТКИ АНАЛІЗУ

Розділ 1. *Показникова та логарифмічна функції* 5

§ 1. Степінь з довільним дійсним показником.
Показникова функція, її властивості та графіки 6
Перевірте свою компетентність! Завдання № 1 16
§ 2. Показникові рівняння. 18
Перевірте свою компетентність! Завдання № 2 26
§ 3. Показникові нерівності 26
Перевірте свою компетентність! Завдання № 3 30
§ 4. Логарифми та їх властивості 32
Перевірте свою компетентність! Завдання № 4 44
§ 5. Логарифмічна функція, її властивості та графік 45
Перевірте свою компетентність! Завдання № 5 52
§ 6. Логарифмічні рівняння 54
Перевірте свою компетентність! Завдання № 6 61
§ 7. Логарифмічні нерівності 62
Перевірте свою компетентність! Завдання № 7 69
Домашня самостійна робота № 1 71
Завдання для перевірки знань до §§ 1–7 72
Україна у світі 72

Розділ 2. *Інтеграл і його застосування* 73

§ 8. Первісна та її властивості 74
Перевірте свою компетентність! Завдання № 8 78
§ 9. Таблиця первісних. Правила знаходження
первісних 80
Перевірте свою компетентність! Завдання № 9 89
§ 10. Визначений інтеграл, його фізичний
і геометричний зміст 91
Перевірте свою компетентність! Завдання № 10 99
§ 11. Обчислення визначених інтегралів. Основні
властивості визначених інтегралів 101
Перевірте свою компетентність! Завдання № 11 107
§ 12. Обчислення площ плоских фігур,
інші застосування визначеного інтеграла у фізиці 109
Перевірте свою компетентність! Завдання № 12 114
Домашня самостійна робота № 2 116
Завдання для перевірки знань до §§ 8–12 117

**Розділ 3. *Елементи теорії ймовірностей
і математичної статистики*** 119

§ 13. Множина та її елементи 120
Перевірте свою компетентність! Завдання № 13 124

§ 14. Елементи комбінаторики. Розміщення,
перестановки, комбінації 125
Перевірте свою компетентність! Завдання № 14 137
§ 15. Випадковий дослід і випадкова подія.
Відносна частота події. Ймовірність події 138
Перевірте свою компетентність! Завдання № 15 148
§ 16. Класичне означення ймовірності 150
Перевірте свою компетентність! Завдання № 16 158
§ 17. Елементи математичної статистики 159
Перевірте свою компетентність! Завдання № 17 167
Домашня самостійна робота № 3 168
Завдання для перевірки знань до §§ 13–17 170
Українки в математиці 171

Частина II. ГЕОМЕТРІЯ

Розділ 1. *Многогранники* 172
§ 1. Многогранники. Призма 173
Перевірте свою компетентність! Завдання № 1 184
§ 2. Паралелепіпед 185
Перевірте свою компетентність! Завдання № 2 194
§ 3. Піраміда 195
Перевірте свою компетентність! Завдання № 3 205
§ 4. Правильні многогранники 206
Перевірте свою компетентність! Завдання № 4 211
Домашня самостійна робота № 1 212
Завдання для перевірки знань до §§ 1–4 214

Розділ 2. *Тіла обертання* 215
§ 5. Тіла обертання. Циліндр 216
Перевірте свою компетентність! Завдання № 5 223
§ 6. Конус 225
Перевірте свою компетентність! Завдання № 6 231
§ 7. Куля та сфера 232
Перевірте свою компетентність! Завдання № 7 239
Домашня самостійна робота № 2 240
Завдання для перевірки знань до §§ 5–7 242

Розділ 3. *Об’єми і площі поверхонь геометричних тіл* 243
§ 8. Об’єм тіла. Об’єм призми та паралелепіпеда 244
Перевірте свою компетентність! Завдання № 8 254
§ 9. Об’єм піраміди 255
Перевірте свою компетентність! Завдання № 9 263
§ 10. Об’єми тіл обертання 264
Перевірте свою компетентність! Завдання № 10 276
§ 11. Площі поверхонь тіл обертання 277
Перевірте свою компетентність! Завдання № 11 285
Домашня самостійна робота № 3 286
Завдання для перевірки знань до §§ 8–11 288

Відповіді та вказівки до задач і вправ 289

Предметний покажчик 299

Навчальне видання

ІСТЕР Олександр Семенович

МАТЕМАТИКА

(алгебра і початки аналізу та геометрія, рівень стандарту)

Підручник для 11 класу
закладів загальної середньої освіти

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України

Видано за рахунок державних коштів.
Продаж заборонено

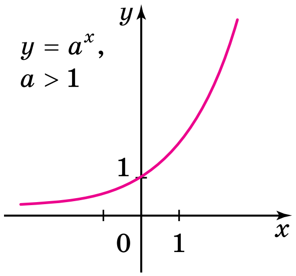
Головний редактор *Наталія Заблоцька*
Редактор *Наталія Дашко*
Обкладинка *Тетяни Кущ*
Макет, художнє оформлення,
комп'ютерна обробка ілюстрацій *Тетяни Кущ*
Комп'ютерна верстка *Олени Білохвост*
Коректор *Лариса Леуська*

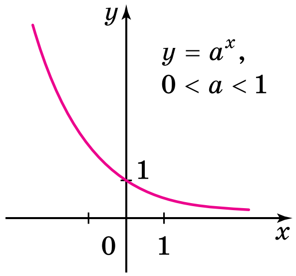
Формат $60\times90/_{16}$.
Ум. друк. арк. 19,0. Обл.-вид. арк. 16,65.
Тираж 112 664 пр. Вид. № 2002.
Зам. № .

Видавництво «Генеза»,
вул. Тимошенка, 2-л, м. Київ, 04212.
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи
серія ДК № 5088 від 27.04.2016.

Віддруковано у ТОВ «ПЕТ»,
вул. Ольмінського, 17, м. Харків, 61024.
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи
серія ДК № 4526 від 18.04.2013.

ГРАФІК ПОКАЗНИКОВОЇ ФУНКЦІЇ





ОСНОВНА ЛОГАРИФМІЧНА ТОТОЖНІСТЬ

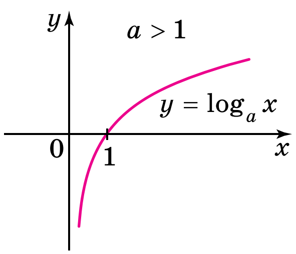
$$\boldsymbol{a^{\log_a b} = b}$$

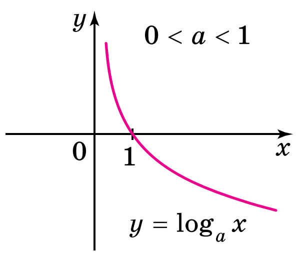
ВЛАСТИВОСТІ ЛОГАРИФМІВ

Для будь-яких дійсних $a > 0$, $a \neq 1$ і $x > 0$, $y > 0$ виконується:

$\log_a 1 = 0$	$\log_a a = 1$
$\log_a xy = \log_a x + \log_a y$	
$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$	
$\log_a x^p = p \log_a x$, $p \in R$	
$\log_{a^q} x^p = \frac{p}{q} \log_a x$, $p \in R$, $q \in R$, $q \neq 0$	
$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$, $b > 0$, $c > 0$, $c \neq 1$	$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$, $b > 0$, $b \neq 1$

ГРАФІК ЛОГАРИФМІЧНОЇ ФУНКЦІЇ





ТАБЛИЦЯ ПЕРВІСНИХ

Функція $f(x)$	**Загальний вигляд первісних $F(x) + C$, де C — довільна стала**
0	C
1	$x + C$
x^α, $\alpha \neq -1$	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$
$\sin x$	$-\cos x + C$
$\cos x$	$\sin x + C$
$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\mathrm{tg}\, x + C$
$\frac{1}{\sin^2 x}$	$-\mathrm{ctg}\, x + C$

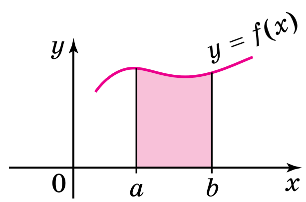
ПРАВИЛА ЗНАХОДЖЕННЯ ПЕРВІСНИХ

1. Якщо $F(x)$ – первісна для $f(x)$, а $G(x)$ – первісна для $g(x)$, то $F(x) + G(x)$ – первісна для $f(x) + g(x)$.
2. Якщо $F(x)$ – первісна для $f(x)$, а k – стала, то $kF(x)$ – первісна для $kf(x)$.
3. Нехай $F(x)$ – первісна для $f(x)$, а k і b – деякі сталі, причому $k \neq 0$. Тоді $\frac{1}{k}F(kx + b)$ – первісна для функції $F(kx + b)$.

ФОРМУЛА НЬЮТОНА–ЛЕЙБНІЦА

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

ПЛОЩА КРИВОЛІНІЙНОЇ ТРАПЕЦІЇ



$$S = \int_a^b f(x)dx$$

ЕЛЕМЕНТИ КОМБІНАТОРИКИ

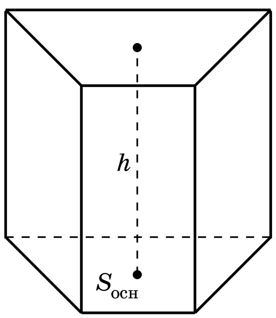
Розміщення	Перестановки	Комбінації
$A_n^m = \dfrac{n!}{(n-m)!}$	$P_n = n!$	$C_n^m = \dfrac{n!}{m!(n-m)!}$

КЛАСИЧНЕ ОЗНАЧЕННЯ ЙМОВІРНОСТІ

Ймовірність події A дорівнює відношенню кількості випадків m, що сприяють появі події A, до кількості всіх можливих випадків n:

$$p(A) = \frac{m}{n}.$$

ПРИЗМА



$V = S_{осн} \cdot h$; $S_{повн} = 2S_{осн} + S_{бічн}$.

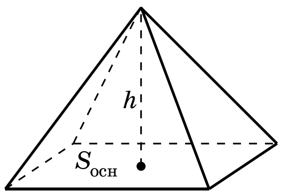
Для прямої призми

$S_{бічн} = Pl$, де

P – периметр основи,

l – бічне ребро

ПІРАМІДА



$V = \frac{1}{3} S_{осн} \cdot h$; $S_{повн} = S_{осн} + S_{бічн}$.

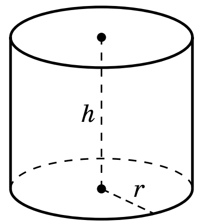
Для правильної піраміди

$S_{бічн} = pl$, де

p – півпериметр основи,

l – апофема

ЦИЛІНДР

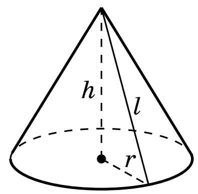


$V = S_{осн} \cdot h = \pi r^2 h$

$S_{бічн} = 2\pi rh$

$S_{повн} = 2S_{осн} + S_{бічн} = 2\pi r^2 + 2\pi rh = 2\pi r(r+h)$

КОНУС

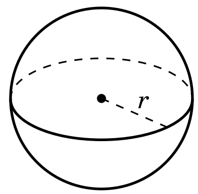


$V = \frac{1}{3} S_{осн} \cdot h = \frac{1}{3}\pi r^2 h$

$S_{бічн} = \pi rl$

$S_{повн} = S_{осн} + S_{бічн} = \pi r^2 + \pi rl = \pi r(r+l)$

КУЛЯ. СФЕРА



$V = \frac{4}{3}\pi r^3$

$S = 4\pi r^2$

ЗНАЧЕННЯ СИНУСА, КОСИНУСА І ТАНГЕНСА ДЕЯКИХ КУТІВ

α	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$	$120°$	$135°$	$150°$	$180°$
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
$\mathrm{tg}\alpha$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	не існує	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$	0